АЛГОРИТМЫ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ НАУКЕ

Д.Кнут

Стэнфорд, США

Моя цель в этом докладе - возбудить дискуссию по поводу одного философского вопроса, который меня уже давно беспокоит: какова действительная роль понятия алгоритма в математических науках?

Я давно убедился, что вычислительная наука (computer science) - это прежде всего изучение алгоритмов. Коллеги не все со мной соглашаются, и причина несогласия в том, что мое определение алгоритмов гораздо шире их определения: я считаю, что алгоритмы охватывают всю область идей, связанных с точно определенными процессами, включая структуру данных, над которыми производятся действия, и структуру выполняемой последовательности операций; они же смотрят на алгоритмы просто как на разнообразные методы для решения отдельных задач, подобные отдельным теоремам в математике.

В США вещи, подобные тому, чем занимаемся я и мои коллеги, носят название Computer Science, выделяющее тот факт, что алгоритмы выполняются машинами. Но если бы я жил в Германии или Франции, область, в которой я работаю, имела бы название Informatik или Informatique, выделяющее то, в первую очередь, над чем работают алгоритмы, а не сами процессы. В Советском Союзе та же область известна под названием кибернетика, выделяющим управление процессом, или же прикладная математика, выделяющим полезность предмета и его связи с математикой вообще.[ж)] Я полагаю, что название на-

[ж)] По мнению переводчика, ни одно из этих двух русских названий не соответствует английскому "Computer science" и вообще не существует установившегося русского эквивалента этого термина; в данной статье для перевода этого термина и его производных используются, в зависимости от контекста, слова "вычислительная наука", "информатика" и "программирование". - Г.Ц.

шей дисциплины не так уж важно, поскольку мы все равно будем продолжать делать то же самое, как бы она ни называлась; в конце концов, другие дисциплины, такие как математика или химия, уже не очень сильно связаны с этимологией своих названий. Однако же, если бы мне представилась возможность проголосовать по поводу названия моей науки, я выбрал бы слово алгоритмика (algorithmics), придуманное около I6 лет назад Дж.Ф.Траубом [28, с.I] .

Место проведения нашего симпозиума особенно располагает к философским дискуссиям, какие я хотел бы вызвать, и своей богатой историей, и величественным пейзажем. Это идеальная возможность для нас рассмотреть долговременные аспекты нашей работы, те проблемы, которые нам обычно не хватает времени осознать в повседневной спешке у себя дома. В течение предстоящей недели у нас будет великолепная возможность оглянуться назад во времени на корни нашего предмета, а также взглянуть вперед и посмотреть, что представляет собой вся наша работа.

Я много лет мечтал совершить паломничество в эти места, с тех пор, как узнал, что слово "алгоритм" образовано от имени ал-Хоризми *), великого ученого IX века, имя которого означает "из Хорезма". Испанское слово guarismo (число в десятичной записи) происходит от того же корня. Хорезм был не просто крупным городом (Хива), как думали многие западные авторы, это была (и есть) довольно большая область. И даже Аральское море когда-то называлось Хорезмским озером (см. напр. [20, таблицы 9-2I]). Ко времени принятия ислама на этой территории (УП век) здесь уже существовала высокая культура, имевшая, в частности, собственную письменность и собственный календарь (ср. ал-Бируни [23]).

Карточки каталога, подготовленные библиотекой конгресса США, указывают, что аль-Хорезми жил и работал между 8I3 и 846 гг. н.э. Любопытно взять среднее арифметическое этих

*) Вопрос о написании этого имени обсуждается автором в примечании в конце статьи; в переводе будет использоваться обычное русское написание: аль-Хорезми. - Перев.

двух чисел, которое равно 829,5 г., почти точно 1150 лет назад. Так что мы находимся здесь в знаменательный момент 1150-летнего юбилея.

Точных сведений о жизни аль-Хорезми довольно мало. Его полное арабское имя является в сущности сжатой биографией: Абӯ Джа'фар Муха̣ммад ибн Мӯса̄ ал-Х̮ōризмӣ, что означает: Мухамед, отец Джафара, сын Моисея, хорезмиец. Однако имя не доказывает, что он родился именно в Хорезме, это могли быть и его предки. Мы знаем, что его научная работа проходила в Багдаде, в рамках академии, называвшейся "Дом мудрости", при халифе ал-Ма'мӯне. Ал-Ма'мӯн был большим покровителем науки, пригласившим к своему двору многих ученых людей с целью собрать и расширить мудрость мира. В этом отношении он опирался на фундамент, заложенный его предшественником, халифом Ха̄рӯн ар-Рашӣдом, который знаком нам по "Тысяче и одной ночи". Историк ат̣-Табарӣ добавлял к имени аль-Хорезми еще ал-Кут̣руббулӣ, имея в виду местность Кут̣руббул недалеко от Багдада. Лично я думаю, что скорее всего аль-Хорезми родился в Хорезме и прожил большую часть своей жизни в Кут̣руббуле после того, как халиф вызвал его в Багдад, но истины мы, вероятно, так и не узнаем.

Харизма аль-Хорезми

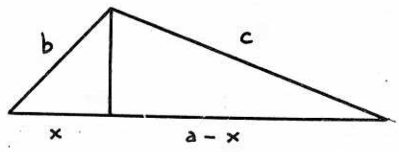
Как бы то ни было, ясно, что работа аль-Хорезми оказала огромное влияние на все последующие поколения. Как утверждает Фихрист, своего рода справочник "Кто есть кто", и библиография 987 года н.э., "при его жизни и впоследствии люди имели обыкновение доверять его таблицам". Некоторые из написанных им книг, по-видимому, утрачены, в том числе историческая Книга Хронологии и труды о солнечных часах и астролябии. Но он составил карту мира (сохранившуюся) с координатами городов, гор, рек и береговых линий; это была самая полная и точная карта из всех составленных к тому времени. Он написал также небольшой трактат о еврейском календаре и составил обширные астрономические таблицы, широко использовавшиеся в течение нескольких столетий. (Разумеется, никто не безгре—

шен: некоторые современные ученые считают, что эти таблицы могли бы быть и точнее.)

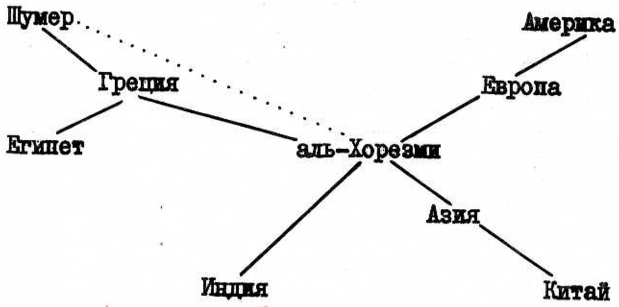
Наиболее значительными работами аль-Хорезми были, скорее всего, его учебники алгебры и арифметики, которые были, по-видимому, первыми арабскими сочинениями, рассматривавшими эти вопросы. Особенно знаменита была его книга по алгебре. Действительно, на сегодняшний день сохранилось не менее трех списков этой работы в арабском оригинале, в то время как более 99% книг других авторов, упомянутых в Фихристе, утеряны. Алгебра аль-Хорезми переводилась на латинский язык не менее двух раз в течение двенадцатого столетия, и таким образом европейцы узнали об этом предмете. Само наше слово "алгебра" восходит к части арабского заглавия этой книги, Китāб ал-джабр ва-л-муқāбала, "Книга Альджабра и Альмукабалы". (Историки расходятся в переводе этого заглавия. Мое мнение, основанное на чтении этой работы и на раннем латинском переводе restaurationis et oppositionis [11, стр. 2], а также на том, что муқāбала означает что-то вроде противостояния, таково, что алгебру аль-Хорезми лучше называть "Книгой о восстановлении и приравнивании").

Мы можем получить некоторое представление о причинах успеха аль-Хорезми, рассмотрев его Алгебру более подробно. Цель этой книги не в том, чтобы собрать все знания об этом предмете, а в том, чтобы дать "наиболее легкие и полезные" начала, ту математику, которая требуется чаще всего. Аль-Хорезми обнаружил, что сложные геометрические приемы, использовавшиеся в вавилонской и греческой математике, могут быть заменены более простыми и систематическими методами, основанными только на алгебраических манипуляциях. Таким образом этот предмет стал доступен более широкой аудитории. Аль-Хорезми научил приводить все нетривиальные квадратные уравнения к одной из трех форм, которые в современных обозначениях мы записали бы как $x^2 + bx = c$, $x^2 = bx + c$ $x^2 + c = bx$, где b и c – положительные; заметим, что он избавился от коэффициента при x^2 при помощи деления. Если бы ему были известны отрицательные числа, он с радостью пошел бы еще дальше и свел бы эти три случая в один.

Я уже говорил, что халиф хотел, чтобы его ученые переложили все существующее научное знание других стран в арабские тексты. Хотя элегантный подход аль-Хорезми к квадратным уравнениям не содержится ни в какой из известных прежних работ, вторая часть его Алгебры (где рассматриваются вопросы геометрических измерений) почти полностью основана на любопытном трактате под названием Мишнат га-Миддот; этот трактат, по всей вероятности, как показывает С.Гандз [I2] , был сочинен еврейским раввином по имени Нехемия около I50 г. н.э. Различия между Мишнатом и Алгеброй помогают нам понять методы аль-Хорезми. Например, если древнееврейский текст утверждает, что окружность круга равна диаметру, умноженному на $3\frac{1}{7}$, аль-Хорезми добавляет, что это лишь общепринятое приближение, а не доказанный факт. В качестве альтернатив он указывает также числа $\sqrt{10}$ и $\frac{62832}{20000}$, из которых второе "используется астрономами". Древнееврейский текст только формулирует теорему Пифагора, а аль-Хорезми добавляет доказательство. Вероятно, наиболее существенное изменение произошло в трактовке площади треугольника общего вида: Мишнат просто дает формулу Герона $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ - полупериметр, а Алгебра идет совершенно иным путем. Аль-Хорезми хотел уменьшить количество элементарных операций, поэтому он показал как вычислять площадь в общем случае по более простой формуле $\frac{1}{2}$ (основание x высота), где высоту можно определить простыми алгебраическими действиями. Пусть перпендикуляр, опущенный на наибольшую сторону треугольника из противоположной вершины, падает на эту сторону на расстоянии x от ее конца; тогда $b^2 - x^2 = c^2 - (a-x)^2$, отсюда $b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$ и $x = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$. Теперь высота треугольника вычисляется как $\sqrt{b^2 - x^2}$ и не нужно учить приемы Герона.



Если только не обнаружится более ранней работы, доказывающей, что аль-Хорезми научился своему подходу к алгебре у кого-то другого, мы будем вправе на основании этих рассмотрений назвать его отцом алгебры. Иначе говоря, мы можем добавить к его имени слова "абу-альджабр"! Общую историю этого предмета можно изобразить примерно следующим образом:



(Пунктирная линия от Шумера указывает на возможную связь древних традиций, которая могла достичь Багдада непосредственно, а не через Грецию. Консервативные ученые сомневаются в существовании такой связи, но я думаю, что они слишком подвержены устарелым историческим представлениям, согласно которым греческие философы считались источником всего научного знания). Конечно, аль-Хорезми не продвинулся дальше квадратных уравнений с одним неизвестным, но он совершил важный скачок, уйдя от геометрии к абстрактному счету, и сделал эту науку систематической и приемлемо простой для практического использования. Он не знал о более ранней работе Диофанта по теории чисел, еще более абстрактной и удаленной от действительности и тем самым более близкой к современной алгебре. Трудно поставить одного из двоих – аль-Хорезми или Диофанта – выше другого, поскольку цели их различны. Греческие ученые принесли с собой поиск знания исключительно ради самого знания – в этом их уникальная роль.

Арабский оригинал небольшой книги аль-Хорезми об "индусском искусстве счета", по-видимому, утрачен. По существу, остался лишь неполный список XIII века, оригиналом которого был, вероятно, латинский перевод XII века с арабского; исходный арабский текст мог существенно отличаться от него. Забавно смотреть на этот латинский перевод глазами современного человека, потому что это, в основном, текст о том, как вычислять в индусских цифрах (т.е. в десятичной системе), но числа в нем записаны римскими цифрами ! Вероятно, оригинальный трактат аль-Хорезми был в этом отношении таким же, с той разницей, что он, возможно, использовал алфавитные обозначения чисел, переделанные для арабского языка из более древних греческих и еврейских источников. Естественно ожидать, что первая работа на эту тему будет формулировать задачи и их решения в старых, известных обозначениях. Я полагаю, что новые обозначения стали хорошо известными вскоре после появления книги аль-Хорезми и, может быть, именно поэтому не сохранилось ни одного экземпляра оригинала.

В латинском переводе арифметики аль-Хорезми на месте большинства индусских цифр – пустые места. Переписчик не успел их вставить, но можно догадаться, как должны быть заполнены эти пробелы. Сохранившаяся часть рукописи до сих пор не переведена с латинского на английский или какой-нибудь другой западный язык, однако в 1964 г. вышел русский перевод [6]. К сожалению, обе опубликованные расшифровки латинского рукописного текста ([11] , [29]) весьма не точны, см. [21] . Безусловно, было бы желательно издать эту работу как следует на английском языке, чтобы больше читателей смогло оценить ее содержание. Излагаемые в ней алгоритмы для десятичного сложения, вычитания, умножения и деления (если можно назвать их алгоритмами, так как в них пропущены многие детали, хотя их писал сам аль-Хорезми) подробно изучены Юшкевичем [9] и Розенфельдом [6] . Интересно то, что они довольно плохо подходят для вычислений с карандашом и бумагой, требуя большого количества вычеркиваний и стираний. Кажется очевидным, что это всего лишь прямое приспособление процедур, использовавшихся для какого-то типа абака в Индии, если не в Персии. Методы, более пригодные для вычислений без абака, были разработаны, по-видимому, ал-Уклйдиси в Дамаске примерно двумя столетиями позже [22] .

Другие сведения о работах аль-Хорезми можно найти в превосходной статье Дж.Тумера в Dictionary of Scientific Biography [27] . Это, безусловно, наиболее полная сводка всего, что сейчас известно о Мухаммаде ибн Мӯсā, хотя, к своему удивлению, я не нашел там упоминания о правдоподобной гипотезе, что местные традиции сохранились со времен Вавилона до исламской эпохи.

Завершая это историческое вступление, я хотел бы упомянуть еще одну замечательную личность из Хорезма, это Абӯ Райхан Мухаммад ибн Ахмад ал-Бйрӯнй (974-1048) - философ, историк, путешественник, географ, лингвист, математик, энциклопедист, астроном, поэт, физик и информатик (computer scientist), автор около 150 книг [18] . Слово "информатик" по праву входит в этот список ввиду интереса ал-Бйрӯнй к эффективным вычислениям. Например, он показал, как вычислить сумму $1+2+\ldots+2^{63}$ - число зерен пшеницы на шахматной доске, если на первой клетке находится одно зерно, на второй - два, на третьей - вдвое больше и т.д.; используя метод типа "разделяй и покоряй", он доказал, что общая сумма равна $(((16^2)^2)^2)^2-1$ и дал ответ 18 446 744 073 709 551 615 в трех системах счисления (десятичной, шестидесятеричной и особой арабской алфавитной). Он отметил также, что это число составляет приблизительно 2305 "гор", если одна гора равна 10000 вади, 1 вади - 10000 стад, 1 стадо - 10000 поклаж, 1 поклажа - 8 бидар, а 1 бидар - 10000 мер пшеницы 22, 23, стр. 132-136; 8 .

Вопросы

В.Дюран заметил, что в тот золотой век средневековой науки "ученых было столько, сколько колонн в тысячах мечетей". И вот, теперь есть возможность, что эти же места вдохновят и нас, собравшихся здесь ученых; и я хотел бы поставить несколько вопросов, которые я считаю важными сейчас.

В каком отношении находятся алгоритмы к современной математике? Есть ли существенная разница между алгоритмической точкой зрения и традиционным математическим взглядом на мир? Действительно ли у большинства математиков мыслительные процессы протекают иначе, чем у большинства информатиков? Почему среди членов университетских математических кафедр именно логики (и, в меньшей степени, комбинаторные математики) обычно проявляют гораздо больше интереса к вычислительной науке, чем их коллеги?

Я ставлю эти вопросы частично на основе моего собственного студенческого опыта. Я начал изучать высшую математику в 1957 году, тогда же, когда начал работать с цифровыми ЭВМ, однако до 1961 года я не соединял каким-либо нетривиальным образом свое математическое мышление с программистским мышлением. В одном здании я был математиком, в другом - программистом, как будто у меня было раздвоение личности. В 1961 году меня увлекла идея о, возможно, общей основе математики и вычислительной науки, поскольку "нормальная форма Бэкуса" выглядит математически. И тогда, купив "Синтаксические структуры" Хомского, я взялся за поиски разрешающего алгоритма для проблемы неоднозначности контекстно-свободных грамматик (не зная, что невозможность этого была установлена в 1960 г. Бар-Хиллелом, Перлесом и Шамиром). Я не решил этой проблемы, хотя и нашел некоторые необходимые условия неоднозначности, а также получил другие результаты как-то: контекстно-свободные языки в однобуквенном алфавите регулярны. Я решил, что это интересная математическая теория, которую я смог построить, используя программистскую интуицию. Летом 1962 г. я потратил пару дней на исследование характеристик хеширования с линейным опробованием, но это не выглядело как союз между моей программисткой и математической личностями, поскольку это было просто применение комбинаторной математики в задаче, имеющей отношение к программированию.

Я думаю, общепризнанно, что у математиков несколько иные мыслительные процессы, чем у физиков, а у тех - несколько иные, чем у химиков, у которых, в свою очередь, они несколько иные, чем у биологов. Аналогично можно думать, что "склад ума" юристов, поэтов, драматургов, историков, лингвистов, фермеров и т.д. особый в каждой профессии. Каждая из этих групп людей может, вероятно, признать, что люди других профессий имеют иной подход к знанию. И кажется правдоподобным, что каждый человек тяготеет к определенному роду занятий, соответствующему тому типу мышления, с которым этот человек вырос, если только имеется возможность выбора. Ч.Сноу написал знаменитую книгу о "двух культурах" - естественно-научной и гуманитарной, но на самом деле их, вероятно, гораздо больше.

Преподаватели вычислительной науки неоднократно отмечали, что из каждой сотни студентов, записавшихся на вводный курс по программированию, лишь два действительно "настроены" на этот предмет, как будто они прирожденные информатики (см., например, Грюнбергер [16]). Я получил независимое подтверждение этому, когда узнал, что из 11000 окончивших Иллинойский университет 220 человек специализируются по вычислительной науке. Поскольку я считаю, что вычислительная наука - это изучение алгоритмов, делаю вывод, что около 2% всех людей "мыслят алгоритмически" в том смысле, что они могут быстро рассуждать об алгоритмических процессах.

Когда готовился этот доклад, стало известно о некоторых статистических данных, собранных недавно Дж.Де-Янгом, психологом с интересом к вычислительной науке, с которым я познакомился в Иллинойсском университете. Он провел недавно интересный эксперимент над двумя группами студентов, посещавшими вводные курсы по вычислительной науке. Группа I состояла из 135 студентов, собирающихся специализироваться по вычислительной науке, а группа II - из 35 специализирующихся по общественным наукам. В обоих курсах делался упор на нечисленное программирование и разнообразные структуры данных и управления, хотя рассматривались и численные задачи. Де-Янг раздал вопросник с тестом, проверяющим так называемые численные способности, (это стандартный тест, который как будто коррелирует со способностями к математике), а также попросил каждого студента оценить собственные успехи в данном курсе. Впоследствии он узнал оценки, фактически полученные студентами. Для каждого студента имелись три величины:

A – численные способности;

B – оценка способностей к программированию, данная самим студентом;

C – оценка способностей к программированию, данная преподавателем.

В обеих группах B хорошо коррелировало с C (коэффициент около 0,6), так что можно сделать вывод, что преподавательские оценки не случайны и что все эти данные что-то отражают. Но интересно то, что среди специализирующихся по вычислительной науке (группа I) не было <u>никакой</u> корреляции между A и B, а также между A и C, в то время как у студентов из группы II между этими величинами была четкая корреляция (около 0,4). Неясно, как истолковать эти данные, поскольку гипотез, объясняющих подобный результат, может быть много. Возможно, психологи умеют измерять численные способности лишь у людей, мыслящих подобно психологам! В любом случае отсутствие корреляции между количественной способностью и успехами в программировании в первой группе сильно напоминает мне часто испытываемое ощущение различия между математическим и программистским мышлением, поэтому дальнейшие исследования целесообразны.

Я думаю, что подлинная причина того, что вычислительная наука стала процветающей дисциплиной практически во всех университетах мира, хотя 20 лет назад о ней никто не знал, <u>не в том</u>, что стало много вычислительных машин. Настоящая причина в том, что среди ученых мира люди с алгоритмическим мышлением никогда прежде не имели своего дома. Нас собирают вместе кафедры вычислительной науки, потому, что там мы встречаем людей, мыслящих подобно нам. Это вполне жизнеспособная гипотеза, которая до сих пор не опровергнута моими наблюдениями.

Моя цель поэтому – добиться более глубокого понимания этих явлений; гипотеза о "различных типах мышления" лишь скользит по поверхности, не проникая вглубь. Можем ли мы создать достаточно четкое представление о том, что же такое алгоритмическое мышление и противопоставить его классическому математическому мышлению? Временами, когда я пытаюсь взяться как следует за эту задачу, я чувствую себя почти убежденным в том, что алгоритмическое мышление такое же, как математическое, только обращается к более "трудным" вещам. Иногда же, наоборот, мне кажется, что алгоритмы захватывают лишь наиболее "простую" математику... Ясно, что такой подход никуда не ведет, а только запутывает.

Недавно, размышляя об этих вопросах, я вспомнил о сборнике популярных статей "Математика, ее содержание, методы и значение" [I] , и перечитал то, что пишет А.Д.Александров в своем великолепном вступительном очерке. Кстати, я обнаружил, что он уделяет заметное внимание аль-Хорезми. Александров перечисляет следующие характерные особенности математики:

- отвлеченность, со многими ступенями абстракции;
- точность и логическая строгость;
- количественные соотношения;
- широта применений.

К сожалению, все эти четыре особенности свойственны и вычислительной науке. Неужели между вычислительной наукой и математикой нет никакой разницы?

Одна идея

Я решил, что не смогу продвинуться дальше, не попробовав поглубже разобраться в вопросе "Что такое математика?". Ответ, конечно, такой: "Математика - это то, чем занимаются математики". Точнее, спрашивать надо было, вероятно, "Что такое хорошая математика?", и тогда ответ будет: "Хорошая математика - это то, чем занимаются хорошие математики".

Поэтому я взял со своей полки 9 книг, в основном те, по которым учился, когда был студентом, и парочку других - для разнообразия, и решил внимательно осмотреть в каждой книге сотую (т.е. "случайную") страницу и исследовать первый результат на этой странице. Таким способом я бы собрал образцы того, чем занимаются хорошие математики, и мог бы попытаться понять, какие типы мышления здесь нужны.

С точки зрения вычислительной науки понятие "типа мышления" не столь неопределенно, как было когда-то, потому что теперь мы можем представить, что пытаемся заставить машинную программу открывать математические факты. Какого рода возможности нужно нам вложить в эту "искусственно интеллектуальную" программу, чтобы она была в состоянии выдать результаты с сотых страниц выбранных мною книг? Чтобы этот эксперимент был честным, я решил придерживаться следующих основных правил:

Все книги должны быть отобраны наугад до рассмотрения какой-либо из них;

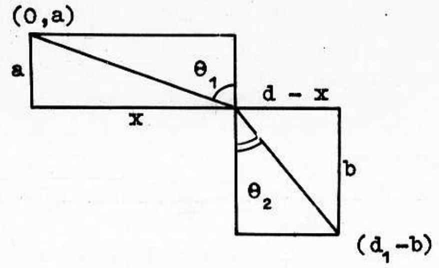
в любом случае необходимо рассматривать именно сотую страницу, поскольку заранее не известно, что находится на этой странице. Если почему-либо она окажется неудачной, выбирать другую нельзя, т.к. тогда результаты будут соответствовать моему предвзятому мнению;

нельзя отбрасывать ничего из полученных данных, каждая отобранная книга должна присутствовать в окончательной выборке, чтобы я не мог исказить результат, выбирая из него подмножество.

Результаты этого эксперимента в какой-то степени открыли мне глаза, и я хотел бы поделиться этими результатами с вами. Вот сводка того, что я получил по каждой книге.

Книга I. Математический анализ Томаса

Я начал с книги, которая впервые познакомила меня с высшей математикой - учебника анализа Дж.Томаса [27] , по которому учился на первом курсе колледжа. На с. 100 рассматривается задача: "Какое значение x минимизирует время на путь от точки $(0,a)$ через $(x, 0)$ до $(d, -b)$, если от $(0, a)$ до $(x, 0)$ надо двигаться со скростью s_1, а от $(x, 0)$ до $(d, -b)$ - с другой скоростью s_2 ?"



Иными словами, нужно найти минимум функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{s_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{s_2}.$$

Для решения дифференцируем $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{x}{s_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{s_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = \frac{\sin\theta_1}{s_1} - \frac{\sin\theta_2}{s_2}.$$

Если x меняется от 0 до d, значение $\frac{\sin\theta_1}{s_1}$ возрастает от нуля, в то время как $\frac{\sin\theta_2}{s_2}$ убывает до нуля. Следовательно, производная сначала положительна, а в конце отрицательна; должна существовать точка, где она равна нулю, т.е. $\frac{\sin\theta_1}{s_1} = \frac{\sin\theta_2}{s_2}$, там и будет минимум. Томас замечает, что это совпадает с "законом Снеллиуса" в оптике; лучи света каким-то образом умеют минимизировать свое время прохождения.

Используемая здесь математика - это главным образом систематическая процедура поиска минимума, основанная на действиях с формулами и соответствием между формулами и геометрическими фигурами, а также рассуждения об изменении значений функции. Будем иметь это в виду при рассмотрении других примеров, чтобы оценить степень сходства между разными примерами.

Книга 2. Обзор математики

Возвращаясь к обзорному трехтомнику под редакцией Александрова и др. [I], мы видим, что с. 100 – это глава об анализе, написанная Лаврентьевым и Никольским.[*] Там показан короткий способ вывода производной от функции

$$\frac{\log_a(x + h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h}\log_a \frac{x + h}{x} = \frac{1}{x}\log_a(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} .$$

Логарифмическая функция непрерывна, поэтому

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\log_a \lim_{h\to 0}(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\log_a e,$$

так как уже доказано, что величина $(1 + \frac{1}{n})^n$ стремится к константе e, если n стремится к бесконечности по целым или нецелым значениям. Здесь рассуждения используют действия над формулами и понимание предельного перехода.

Книга 3. Общая топология Келли

Третья взятая мной книга – это стандартный учебник топологии [I0], где на с. 100 [**] дано следующее упражнение: "Задача А. Образ связного пространства при непрерывном отображении связен". Решения не дается, но я думаю, что имелось в виду что-нибудь вроде следующего рассуждения. Вначале вспомним соответствующие определения, что функция f из топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывна, если для всякого открытого множества V в Y его прообраз $f^{-1}(V)$ – открытое множество в X, и что топологическое пространство X связно, если его

*) Стр.III русского оригинала – Перев.

**) Стр. I40 русского перевода. Прим. ред.

нельзя записать в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств. Докажем теперь, полагая $f(X) = Y$, что Y связно, если f непрерывно и X связно. Если $Y = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 – непересекающиеся открытые множества, то $X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$, где $f^{-1}(V_1)$ и $f^{-1}(V_2)$ – непересекающиеся и открытые. Отсюда следует, что либо $f^{-1}(V_1)$, либо $f^{-1}(V_2)$ пусто, например, $f^{-1}(V_1)$ пусто. Тогда получаем, что V_1 пусто, т.к. $V_1 \subseteq f(f^{-1}(V_1))$, что и требовалось доказать. (Заметим, что в доказательстве не потребовались никакие свойства открытых множеств).

Математическое мышление, использованное здесь, несколько отличается от того, что мы видели перед этим; в основном это построение цепочек импликаций от исходных предположений до требуемых выводов с использованием набора фактов типа

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Это похоже на построение цепочек машинных команд, преобразующих некоторые входные данные в требуемые выходные данные с использованием набора подпрограмм, хотя топологические факты более абстрактны.

Не будем забывать и еще об одном виде математического мышления, который был здесь использован: кто-то должен был определить понятия непрерывности и связности так, чтобы они приводили к богатой теории со многими приложениями, обобщая много частных случаев, которые доказывались независимо, пока не обнаружилась общая абстрактная схема.

Книга 4. Из ХУШ века

Еще одна книга в моем списке – "Математические источники" Стройка [25] , где цитируются авторы знаменитых работ, написанных в период 1200-1800 гг. н.э. На стр. 100 рассматривается попытка Эйлера доказать основную теорему алгебры, на пути к которой он доказывает следующий вспомогательный результат: "Теорема 4. Всякий полином четвертой степени $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ с вещественными коэффициентами может быть разложен в произведение двух квадратных трехчленов".

Вот как он это делает. Сперва он сводит задачу к случаю $A = 0$, полагая $x = y - \frac{1}{4}A$. После этого остается найти такие u, α и β, что

$$(x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta) = x^4 + Bx^2 + Cx + D,$$

для этого нужно решить систему $B = \alpha + \beta - u^2$, $C = (\beta - \alpha)u$, $D = \alpha\beta$. Из этих уравнений получаем $2\beta = B + u^2 + \frac{C}{u}$, $2\alpha = B + u^2 - \frac{C}{u}$, и $(B + u^2)^2 - \frac{C^2}{u^2} = 4D$. Но полином третьей степени $(u^2)^3 + 2B(u^2)^2 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2$ изменяется от $-C^2$ до $+\infty$, когда u^2 пробегает значения от 0 до ∞, поэтому он имеет положительный корень, что и решает задачу.

(Эйлер переходит к обобщению, утверждая, что любое уравнение степени $2n$ можно разложить на два уравнения степени 2^{n-1} посредством уравнения нечетной степени $\frac{1}{2}\binom{2^n}{2^{n-1}}$ относительно u^2 с отрицательным свободным членом. Но в этом месте его доказательство нестрогое, на что позднее указали Лагранж и Гаусс.

При первом просмотре этот пример показался мне "алгоритмичнее" предыдущих, вероятно, из-за того, что Эйлер в сущности объясняет, как, получив полином четвертой степени на входе, выдать на выход два квадратных полинома. Характеристики ввода/вывода являются важным аспектом алгоритмов, хотя фактически конструкция Эйлера сравнительно проста и прямолинейна и в ней нет сложной структуры управления, обычно присущей алгоритмам. Использованные здесь типы мышления, по-видимому, следующие:

сведение общей задачи к более простому частному случаю (доказательство, что A можно положить равным нулю, а также осознание того, что уравнение шестой степени относительно u – это фактически уравнение третьей степени относительно u^2); формульные преобразования для решения системы уравнений с α, β и u;

обобщение, выразившееся в выделении для случая 4-й степени некоторой схемы, которая как будто бы распространяется на 8-ю, 16-ю и т.д. степени.

Книга 5. Абстрактная алгебра

Следующим был учебник "Коммутативная алгебра" Зарисского и Самуэля [2], На стр. 100*) у них рассматривается общая структура произвольных полей.

Пусть k и K – поля, причем $k \subseteq K$; **степень трансцендентности** K **над** k определяется как число элементов произвольного "базиса трансцендентности" L поля K над k, т.е. такого множества L, что все его конечные подмножества алгебраически независимы над k, а все элементы K – алгебраические над $k(L)$, т.е. являются корнями полиномиальных уравнений, коэффициенты которых принадлежат наименьшему полю, содержащему $k \cup L$. В книге только что было установлено, что это число элементов является инвариантом пары k и K, т.е. что все базисы трансцендентности K над k имеют одинаковое число элементов.

Дальше идет теорема 26: если $k \subseteq K \subseteq \mathcal{K}$, то степень трансцендентности $\mathcal{K}$ над k равна сумме степеней трансцендентности K над k и $\mathcal{K}$ над K. Для доказательства авторы берут L – базис трансцендентности K над k и $\mathcal{L}$ – базис трансцендентности $\mathcal{K}$ над K. Идея состоит в доказательстве того, что $L \cup \mathcal{L}$ является базисом трансцендентности $\mathcal{K}$ над k, откуда следует требуемый результат, так как L и $\mathcal{L}$ не имеют общих элементов.

Доказательство несложно и заслуживает подробного разбора. Пусть $\{x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_M\}$ – конечное подмножество $L \cup \mathcal{L}$, где все x-ы взяты из L, а X-ы из $\mathcal{L}$ Предположим, что они удовлетворяют полиномиальному уравнению над k

$$\sum_{\substack{e_1,\ldots,e_m \geq 0 \\ E_1,\ldots,E_M \geq 0}} \alpha(e_1,\ldots,e_m,E_1,\ldots,E_M) x_1^{e_1} \ldots x_m^{e_m} X_1^{E_1} \ldots X_M^{E_M} = 0, \quad (*)$$

*) На стр. 121 русского перевода. Прим. ред.

где все $\alpha(e_1,\dots,e_m,\ E_1,\dots,E_M)$ принадлежат k и среди них лишь конечное число ненулевых. Это уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{E_1,\dots,E_M\geq 0}\Big(\sum_{e_1,\dots,e_m\geq 0}\alpha(e_1,\dots,e_m,\ E_1,\dots,E_M)x_1^{e_1}\dots x_m^{e_m}\Big)\times$$

$$\times X_1^{E_1}\dots X_M^{E_M} = 0. \qquad (**)$$

Здесь левая часть - полином относительно X-ов с коэффициентами из K, следовательно, ввиду алгебраической независимости элементов $\mathcal{L}$ над K, все коэффициенты равны нулю. В свою очередь, сами они представляют собой полиномы относительно x-ов с коэффициентами из k, поэтому все α-ы должны быть нулями. Другими словами, любое конечное подмножество $L\cup\mathcal{L}$ алгебраически независимо.

Наконец, все элементы K алгебраические над $k(L)$, а все элементы $\mathcal{K}$ алгебраические над $K(\mathcal{L})$. Из ранее построенной теории алгебраических расширений следует, что все элементы $\mathcal{K}$ алгебраические над $k(L)(\mathcal{L})$ - наименьшим полем, содержащим $k\cup L\cup\mathcal{L}$. Итак, $L\cup\mathcal{L}$ удовлетворяет всем условиям для базиса трансцендентности.

Заметим, что доказательство использует довольно сложные "структуры данных", т.е. представления сложных объектов, в данном случае полиномов от многих переменных. Главная идея доказательства - это "игра слов", эквивалентность между полиномом (*) над k и полиномом (**) над $k(L)$. В сущности, вся структурная теория полей, излагаемая в этой части книги Зарисского и Самуэля, представляет собой теорию структур данных, при помощи которых можно оперировать всеми элементами поля. Важна не столько сама теорема 26, сколько построение базисов трансцендентности в ее доказательстве.

Другая интересная особенность этого примера - это способ рассмотрения бесконечных множеств. Конечные понятия обобщаются на бесконечный случай при помощи требования, чтобы все конечные подмножества обладали заданным свойством. Это позволяет применять к подмножествам алгоритмические построения.

Книга 6. Метаматематика

Я выбрал "Введение в метаматематику" Клини [4] в качестве типичной книги по логике. На стр. 100 [ж)] речь идет об "исключении дизъюнкции". Пусть дано

$$\vdash A \vee B, \tag{1}$$

$$A \vdash C \tag{2}$$

$$B \vdash C. \tag{3}$$

Тогда, по только что доказанному правилу, (2) и (3) дают

$$A \vee B \vdash C. \tag{4}$$

Из (1) и (4) мы можем теперь получить $\vdash C$. Клини отмечает, что это хорошо известный принцип разбора случаев. Если верно A или B, мы можем рассмотреть по отдельности случай 1, когда верно A (и тогда выполняется C), и случай 2, когда верно B (и снова выполняется C). Отсюда следует, что утверждение C выполняется в любом случае.

Рассуждение в этом примере - это простое формульное преобразование, соединенное с пониманием того, что здесь обобщаются и формализуются общеизвестные мыслительные схемы.

Я надеялся встретить здесь более характерное математическое рассуждение, подобно тому, что "все, что можно доказать в системе X, может быть доказано и в системе Y", поскольку такие рассуждения часто на самом деле оказываются алгоритмами, преобразующими произвольное X-доказательство в Y-доказательство. Но стр. 100 оказалась более элементарной, поскольку вся книга вводная.

Книга 7. Кнут

А моя работа [14] - алгоритмическая? Это не касается [жж)]

ж) Стр. 20 русского перевода. Прим. ред.

жж) Стр. 135-136 русского перевода

стр.100, потому что она приходится на введение в математический аппарат, и речи о собственно вычислительной науки пока нет. На ней находится среднее значение и стандартное отклонение числа выпадений "орла" при n бросаниях монеты, если при каждом отдельном бросании "орел" выпадает с вероятностью p, а "решка" – с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначаем через p_{nk} вероятность, что k раз будет "орел", и замечаем, что

$$p_{nk} = p \cdot p_{n-1,k-1} + q \cdot p_{n-1,k}.$$

Для решения этого рекуррентного соотношения вводим порождающую функцию

$$G_n(z) = \sum_{k \geq 0} p_{nk} z^k$$

и получаем $G_n(z) = (q + pz)G_{n-1}(z)$, $G_1(z) = q + pz$.
Отсюда $G_n(z) = (q + pz)^n$,

$$\mathrm{mean}(G_n) = n\ \mathrm{mean}(G_1) = pn;$$

$$\mathrm{var}(G_n) = n\ \mathrm{var}(G_1) = pqn.$$

Таким образом, рекуррентное соотношение было установлено путем рассуждений о вероятностях; решено посредством формульных преобразований по образцам, ранее рассмотренным в этой книге. Хочется думать, что здесь я поступил, как аль-Хорезми: не использовал для этой конкретной задачи особого приема, а иллюстрировал общий метод.

Книга 8. Пойя и Сегё

Старая добрая математика представлена здесь знаменитыми "Задачами и теоремами из анализа" Пойя и Сегё [7], вышедшими недавно в английском переводе со многими новыми задачами. Задача на стр. 100*) – крепкий орешек:

---

*) Стр. 108 русского перевода

$$217. \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n!2^{2n\cos\theta}}{|(2ne^{i\theta}-1)\ldots(2ne^{i\theta}-n)|}\,d\theta = 2\pi.$$

К счастью, в разделе решений есть указания, позволяющие найти доказательство, которое имели в виду авторы. Имеем

$$|2ne^{i\theta} - k|^2 = 4n^2 + k^2 - 4nk\cos\theta =$$

$$= (2n-k)^2 + 4nk(1-\cos\theta) = (2n-k)^2 + 8nk\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Заменяя θ на $\frac{x}{\sqrt{n}}$, запишем интеграл в виде

$$\frac{n!2^{2n}}{((2n-1)\ldots n)\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx,$$

где $f_n(x) = 0$ $|x| > \pi\sqrt{n}$, а для остальных x

$$f_n(x) = 2^{2n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)} \prod_{1\le k\le n} \left(1 + \frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \exp\left((2\ln 2)n\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}} - 1\right) - \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-x^2\ln 2 + O\left(\frac{x^4}{n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(\frac{-2nk}{(2n-k)^2}\frac{x^2}{n} + O\left(\frac{x^4}{n^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-x^2\ln 2 - (1-\ln 2)x^2 + O\left(\frac{1+x^4}{n}\right)\right).$$

Таким образом, $f_n(x)$ равномерно сходится к e^{-x^2} в любом ограниченном интервале. Более того, $|f_n(x)| \le 2^{2n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)}$

и

$$\cos\frac{x}{\sqrt{n}} - 1 \le -\frac{x^2}{2n} + \frac{x^4}{24n^2} \le -\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{24}\right)\frac{x^2}{n}$$

при $|x| \le \frac{\pi}{\sqrt{n}}$, так как косинус "обрамлен" своим рядом Маклорена; поэтому $|f_n(x)|$ при любом n меньше интегрируемой функции e^{-cx^2}, где $c = 1 - \frac{\pi^2}{12}$. Ввиду доказанной равномерно ограниченной сходимости, мы можем перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Наконец, коэффициент перед $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx$ равен $\frac{2^{2n+1}\,n!^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}$, что по формуле Стирлинга приводится к $2\sqrt{\pi}(1 + O(\frac{1}{n}))$, откуда и следует доказываемый результат.

Этот вывод дает некоторое представление о том, как далеко шагнула математика от времен аль-Хорезми до 1920 г. Он содержит формульные преобразования и понимание ассимптотического поведения функций, а также идею выбора подходящей функции f_n, которая бы позволила строго провести перестановку

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx.$$

Определение $f_n(x)$ требует ясного понимания поведения таких функций, как $\exp x$ и $\cos x$.

Книга 9. Конструктивная математика Бишопа

Последняя из отобранных мной книг оказалась самой интересной с точки зрения моей цели, это "Основания конструктивной математики" Э.Бишопа [IO] , книга, о которой я слышал, но прежде не читал. Интересно в ней то, что она читается почти как обычная математика, однако по существу, если читать между строк, она полностью алгоритмическая.

На интересующей меня странице находится следствие 3 теоремы Стоуна-Вейерштрасса, полученной на предыдущих страницах: всякую равномерно непрерывную функцию на компактном множестве $X \subseteq R$ можно как угодно точно аппроксимировать на X полиномиальными функциями над R. А вот доказательство: "По лемме 5 функцию $x \mapsto |x - x_0|$ можно как угодно точно аппроксимировать на X полиномами. Доказываемая теорема получается отсюда по следствию 2".

Вот это краткость! Но прежде, чем развернуть это доказательство, объяснив, что такое лемма 5 и следствие 2, я хочу подчеркнуть, что это доказательство в сущности является алгоритмом: на входе берутся произвольное конструктивно заданное компактное множество X, непрерывная функция f и погрешность ε, а на выходе дается полином, аппроксимирующий f с погрешностью не больше ε на всех точках X. Более того, этот алгоритм работает над алгоритмами, так как f задана посредством алгоритма определенного типа и вещественные числа сами по существу являются алгоритмами.

Попытаемся перевести неявные алгоритмы Бишопа в явную алголоподобную форму, хотя сегодняшние языки программирования лишь с большой натяжкой могут выразить эти построения. Рассмотрим вначале лемму 5, которая утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой полином $p: R \to R$, что $p(0) = 0$ $||x| - p(x)| \le \varepsilon$ для всех $|x| \le 1$. Доказательство Бишопа, превращающее эту лемму в алгоритм, состоит в следующем

```
R - полином procedure лемма 5 (real ε);
begin integer N; R - полином g,p;
N: = соответствующая функция от ε;
```

$$g(t) := 1 - \sum_{1\le n\le N} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n t^n;$$

$$p(t) := g(-t^2) - g(1);$$

<u>return</u> p;

<u>end</u>.

Здесь вычисление N должно давать значение, достаточно большое, чтобы было $|g(t) - (1-t)^{\frac{1}{2}}| \le \frac{1}{2}\varepsilon$ при $0 \le t \le 1$.

Вторая нераскрытая часть доказательства на стр. 100 - это следствие 2, где утверждается, что, если X - произвольное компактное метрическое пространство, а G - множество всех функций $x \mapsto \rho(x, x_0)$, где $x_0 \in X$ и $\rho(x, y)$ обозначает расстояние от x до y, то "$\mathcal{A}$(G) плотно в C(X)". Иначе говоря, все равномерно непрерывные вещественные функции на X могут быть аппроксимированы с любой точностью функциями, получаемыми из G конечным числом сложений, умножений и умножений на вещественные числа. В приведенной формулировке следствие 2 неверно для случая, когда X состоит из одной точки, так как G и $\mathcal{A}$ (G) состоят тогда только из нулевой функции. Я заметил это упущение, когда пытался представить его доказательство в явной алгоритмической форме, но этот недостаток легко исправить.

Для наших целей лучше всего переформулировать следствие 2 следующим образом: пусть X - компактное метрическое пространство, имеющее не менее 2-х точек, а G - множество всех функций вида $x \mapsto c\rho(x, x_0)$, где $c > 0$ и $x_0 \in X$. Тогда G - разделяющая система (separating family) на X. Определение разделяющей системы у Бишопа я повторю чуть позже. Для начала, я хочу сослаться на его теорему 7 - теорему Стоуна-Вейерштрасса, доказательство которой я не будут разбирать: если G - разделяющая система равномерно непрерывных функций на компактном метрическом пространстве X, то $\mathcal{A}$ (G) плотно в C(X). В силу этой теоремы, из моей переформулировки следствия 2 получается следствие в формулировке автора.

Разделяющая система – это множество G вещественных функций на X вместе с функцией δ из R^+ в R^+ и с двумя выбирающими алгоритмами σ и τ. Алгоритм σ получает на входе элементы x, y из X и положительное вещественное число ε, для которых $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, и выбирает такой элемент g из G, что для любого z из X

$$\rho(x, z) \leq \delta(\varepsilon) \quad \text{влечет} \quad |g(z)| \leq \varepsilon,$$

$$\rho(y, z) \leq \delta(\varepsilon) \quad \text{влечет} \quad |g(z) - 1| \leq \varepsilon.$$

Алгоритм τ получает на входе элемент y из X и положительное вещественное число ε и выбирает элемент g из G, такой что для всех z из X выполняется вторая из только что написанных импликаций.

Итак, переформулированное следствие 2 – это алгоритм, получающий на входе нетривиальное компактное метрическое пространство X и выдающий разделяющую систему (δ, σ, τ), где σ и τ выбирают функции вида $c\rho(x, x_0)$ ж) Вот эта конструкция:

```
X - разделяющая система procedure следствие 2
    (компактное метрическое пространство X;
X - элемент y₀, y₁);
comment y₀ и y₁ - различные элементы X;
begin R⁺ → R⁺ функция δ;
      X×X → R⁺ функция d;
X×X×R⁺ → C(X) функция σ;
X × R⁺ → C(X) функция τ;
X × X → R функция d;жж)
d(x, y): = X·ρ(x, y);
   comment это функция расстояния в X;
   δ(ε): = min(ε², 1/2 εd(y₀, y₁));

σ(x, y, ε): = (R procedure g (X - элемент z);
                return d(x, z)/d(x, y));
```

ж) В оригинале c пропущено – Перев.

жж) Эта строка – лишняя. – Перев.

```
τ(y, ε): = (R procedure g (X - элемент  z);
        return (if d(y, y₁) ≤ 1/2 d(y₀, y₁);
                then d(y, z)/d(y, y₀);
                else d(y, z)/d(y, y₁)));
    return (δ, σ, τ);
    end.*)
```

Мои обозначения сложных типов, встречающихся в этих алгоритмах, - не самые лучшие, но, надеюсь, понятны без особых разъяснений. Правило выбора σ, определяемое этим алгоритмом, имеет требуемое свойство, так как, например, при $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ $\rho(y, z) \leq \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon^2$ будет

$$|g(z) - 1| = \frac{|\rho(x, z) - \rho(x, y)|}{\rho(x, y)} \leq \frac{\rho(y, z)}{\rho(x, y)} \leq \varepsilon.$$

Теперь можно представить доказательство следствия 3 у Бишопа более явно в виде алгоритма. Если X - компактное подмножество R (по определению Бишопа), мы можем вычислить M = грань (X), такое что X содержится в замкнутом промежутке [- M, M]. Будем считать, что теорема 7 - это

---

*) Последнее присваивание лучше было бы записать в виде

```
τ(y, ε): = if d(y, y₁) ≤ 1/2 d(y₀, y₁)
        then (R procedure g (X - элемент  z);
                return (d(y, z)/d(y, y₀));
        else (R procedure g (X - элемент  z);
                return (d(y, z)/d(y, y₁))),
```

иначе получаемая функция τ не имеет требуемого вида. Кроме того, условие после if не проверяемо алгоритмически.- Перев.

процедура, входные параметры которой состоят из компактного метрического пространства X, разделяющей системы (δ, σ, τ) на X, которая выбирает функции из некоторого множества $G \subseteq C(X)$, равномерно непрерывной функции $f: X \to R$ и положительного вещественного числа ε. Выходом процедуры является элемент A из $\mathcal{A}(G)$, т.е. сумма конечного числа членов вида $Cg_1(x)\ldots g_m(x)$, где $m \geq 1$ и все $g_i \in G$; этот результат удовлетворяет соотношению $|A(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ для всех x из X.

Вот как запишется тогда следствие 3.

```
        R - полином procedure следствие 3
           (компактное вещественное множество X;
              X - непрерывная функция f;
               положительное ε );
begin R - полином p, q, r; real M, B; X - элемент y₀, y₁;
𝒜 (G) = элемент A,  где  G - множество функций
x ↦ c|x - x₀|;
M := грань (X);
y₀ := элемент (X);
if тривиально (X) then r(t) := f(y₀);
else begin y₁ := элемент (X\{y₀});
     A := теорема 7(X, следствие 2(X, y₀,y₁), f, ε/2);
     B := соответствующая функция от A, см. ниже;
     p(t) := лемма 5(ε/B);
     q(t) := 2Mp(t/2M);
     comment ||x - x₀| - q(x - x₀)| ≤ ε/B для любого x;
     r(x) := подставить в каждом члене A вместо
        каждого множителя вида gᵢ(x) = c|x - x₀|
        выражение cq(x - x₀);
  comment B было выбрано таким образом,
   чтобы из |q(x - x₀) - |x - x₀|| ≤ ε/B
```

```
      Следовало   |r(x) - A(x)| ≤ 1/2 ε;
   end;
return r;
end.
```

Разумеется, с точки зрения языков программирования высокого уровня было бы крайне интересно найти красивую систему обозначений, в которой построения Бишопа были бы одновременно явными и удобочитаемыми.

Предварительные выводы

Что открывают нам эти девять случайно выбранных образцов математики? Прежде всего, они указывают на одно обстоятельство, которое должно было быть очевидным с самого начала, а именно: не существует "математического мышления" как единого отграниченного понятия: математики используют не один, а много разных типов мышления. Поэтому мой вопрос об отличии программистского мышления от математического следует сформулировать иначе. И действительно, вспоминая свои студенческие годы, я понимаю,что я не только носил шляпу программиста, когда программировал, и шляпу математика, когда слушал лекции, но имел и другие "шляпы", соответствующие различным видам мышления, которые я использовал, когда редактировал студенческий журнал или исполнял обязанности в студенческом обществе и т.п. А из биографии ал-Бируни видно, что у него было разных "шляп" больше, чем у кого-либо.

Таким образом, лучше, вероятно, придумать модель, в которой каждый человек обладает некоторым количеством разных типов мышления, вроде генов в ДНК. По всей вероятности, программисты и математики частично перекрываются в том смысле, что некоторые типы мышления у них общие, а другие - специфичны для тех или для других. В такой модели разные области науки будут характеризоваться разными "личностными профилями".

Я пытался выделить разные типы рассуждений, встречающиеся в этих девяти примерах, и получил девять категорий, которые изобразил бы схематически примерно следующим образом. (Два крестика обозначают сильное использование определенного типа рассуждений, один крестик – умеренную связь).

Автор, книга	Формульные преобразования	Представление действительности	Поведение значений функции	Сведение к более простым задачам	Работа с бесконечностями	Обобщение	Абстрактные рассуждения	Информационные структуры	Алгоритмы
I. Томас	XX	XX	XX						
2. Лаврентьев	XX		X		XX				
3. Келли	X					XX	XX		
4. Эйлер	XX		XX	X		XX			X
5. Зарисский	X			X	XX	X	XX	XX	
6. Клини	X					XX	XX		X
7. Кнут	XX	X		X					
8. Пойя и Сегё	XX		XX	XX	XX				
9. Бишоп	XX		XX	XX		X	XX	XX	X
I0. "Алгоритмическое мышление"	X	XX		XX			XX	XX	XX

Эти девять категорий определены не вполне точно, и возможно, представляют собой сочетания более фундаментальных единиц, например, как формульные преобразования, так и обобщение связаны с общей идеей распознавания образов, обнаружением определенных типов упорядоченности. Другое фундаментальное различие может быть связано с типом "внутреннего образа": геометрическим, абстрактным, рекурсивным и т.п. В общем, я вовсе не уверен в этих категориях, просто они предлагаются как основа для обсуждения.

Я добавил к таблице десятую строку под названием "алгоритмическое мышление", с целью отразить наиболее типичные, по моему мнению, мыслительные процессы, используемые представителями вычислительной науки. Поскольку вычислительная наука еще не очень молода, я не знаю, какие книги по ней подошли бя для изучения сотой страницы; возможно, кто-либо из слушателей поможет мне завершить это исследование. Мне представляется, что большая часть типов мышления, представленных в таблице, встречается как в вычислительной науке, так и в математике, за одним существенным исключением - "рассуждений о бесконечностях". Бесконечномерные пространства не представляют особого интереса для программистов, хотя большинство других разделов математики имеет широкие и разнообразные применения.

Я думаю, что программисты заметят, что в рассмотренных примерах отсутствуют еще два типа мышления, и, возможно, именно это разделяет математиков и программистов.

Во-первых, в том, что мы рассмотрели, почти отсутствует понятие "сложности", или экономии действий. Математика Бишопа конструктивна, но не обладает всеми чертами алгоритмов, поскольку не учитывает "стоимости" выполняемых построений. Если мы полностью проведем построения его теоремы Стоуна-Вейерштрасса для простых функций, то, вероятно, получим аппроксимирующий полином степени, скажем, 10^6, хотя более эффективным методом можно было бы найти подходящий полином 6-й степени.

Второе отсутствующее понятие связано с операцией присваивания :=, изменяющей значения величин. Или точнее, отсутствует динамическое понятие состояния процесса: "Как я сюда попал? Что истинно в данный момент? Что должно произойти дальше, если я хочу дойти до конца?" Меняющееся положение дел, мгновенные снимки вычисления, по-видимому, глубоко связаны с алгоритмами и алгоритмическим мышлением. В структурах данных, играющих в вычислительной науке столь фундаментальную роль, многие идеи существенно основаны на способности рассуждать о состояниях процесса, и то же самое понятие мы используем, когда изучаем взаимодействие одновременно идущих процессов.

В наших девяти примерах нет ничего похожего на " $n := n + 1$", не считая рассуждений Эйлера, где он начинает, в сущности, с того, что полагает $x := x - \frac{1}{4}A$. Операции присваивания в построениях Бишопа - это не настоящие присваивания, это просто определения величин, которые потом не меняются. Расхождение между классической математикой и вычислительной наукой хорошо иллюстрируется тем, что Беркс, Голдстайн и фон Нейман в своих первых заметках по программированию фактически не имели понятия присваивания; вместо него они использовали любопытное промежуточное понятие (см. [I9]).

Самое близкое к операции " := " в классической математике - это сведение более сложной задачи к более простой, так как более простая задача занимает место прежней задачи. Именно так поступал аль-Хорезми, когда делил обе части квадратного уравнения на коэффициент при x^2. И, завершая свой доклад, я вновь отдаю должное аль-Хорезми - замечательному пионеру нашей науки.

Подготовка настоящего доклада финансировалась частично по субсидии MCS72-03752 A 03 Национального Научного Фонда и частично по контракту N00I4-76-C-0330 Управления Военно-Морских Исследований. Моя жена и я благодарим узбекских хозяев за несравненное гостеприимство. Многие лица, имена которых невозможно здесь перечислить, помогли автору своими мнениями, высказанными в неформальных обсуждениях рассмотренных здесь вопросов.

Замечание по написанию слова "Х̮о̄ризм"

В первом и втором изданиях моей книги [5] я писал имя Мухаммада бен Мӯса̄ "al-Khowârizmî", следуя написанию, принятому в большинстве американских книг до I930 г. и сохранившемуся во многих современных книгах. Недавно я узнал, что более точной транслитерацией арабского написания было бы "al-Khuwârizmî", так как соответствующая буква звучит как " "; этому соглашению следует Библиотека Конгресса США. Ученые мавры, которые в средние века принесли арабские труды в Испанию, произносили, вероятно, эту букву так же, как они произнесли бы латинское "o". Неясно, в какой степени произношение этой гласной изменилось с тех пор как на Востоке, так и на Западе. Как бы то ни было, примерно с 1935 г. ведущие американские специалисты по истории восточной математики почти единодушно приняли написание "al-Khwârizmî" ж) (или , эквивалентно, "al-Khwārizmī" - так легче печатать на обычных машинках). Они, очевидно, знают этот предмет гораздо лучше меня, и я отныне буду рад следовать их практике.

Литература

1. А.Д.Александров, А.Н.Колмогоров, М.А.Лаврентьев. "Математика: ее содержание, методы и значение". М.-Л., АН СССР, 1956.
2. О.Зарисский, П.Самуэль. Коммутативная алгебра. т.I, М., ИЛ, 1963.
3. Дж. Л.Келли. Общая топология.-М.: Наука , 1968.
4. С.К.Клини. Введение в математику. М., ИЛ, 1957.
5. Д.Е.Кнут. Искусство программирования на ЭВМ. Основные алгоритмы.-М.: Мир, 1976.
6. Ю.Х.Копелевич, Г.А.Розенфельд (перев.) Мухаммед аль-Хорезми: Математические трактаты (с коммент. Б.А.Розенфельда) Ташкент, АНУз ССР, 1964.
7. Д. Пойа, Г.Сегё. Задачи и теоремы из анализа. т.I.-М.: Наука, 1978.
8. С.Х.Сираждинов, Г.П.Матвиевская. Абу Райхан Беруни и его математические труды.-М.: Просвещение, 1978.
9. А.П.Юшкевич. Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса Аль-Хорезми .-Тр.Ин-таИстории естествознания и техники , 1954 , с.85-127.

ж) См. Л.З.Писаревский. О названии "Хорезм" в арабской историко-географической литературе. Уч.Зап.ЛГУ, № 374, серия востоковедческих наук, вып. 17, стр. 201-202, Изд.Ленингр. ун-та, 1974. - Перев.

10. E.Bishop. Foundations of constructive analysis. N.Y., McGraw-Hill, 1967.
11. B.Boncompagni (ed.). Algoritmi de numero indorum. Trattati d'Aritmetica, v.1 (Rome, 1857).
12. S.Gandz. The Mishnat Ha Middot. Proc. Amer. Acad. of Jewish Research, 4 (1933), p. 1-104.
13. S.Gandz. Sources of al-Khowârizmî's Algebra. Osiris, 1 (1936), p. 263-277.
14. S.Gandz. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. Osiris, 3 (1938), p. 405-557.
15. S.Gandz. The algebra of inheritance. Osiris, 5 (1938), p. 319-391.
16. F.Gruenberger. The role of education in preparing effective computing personnel. -In: F.Gruenberger (ed.) Effective vs. Efficient Computing, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1973, p. 112-120.
17. L.Ch.Karpinski (ed.). Robert of Chester's latin translation of the Algebra of Al-Khowârizmî. Univ. Michigan Humanistic Series, 11, part 1 (Ann Arbor, 1915), 164 p.
18. E.S.Kennedy. Al-Biruni. Dictionary of Scientific Biography 2, N.Y., 1970, p. 147-158.
19. D.E.Knuth, L.T.Pardo. The early development of programming languages. Encyclopedia of Computer Science and Technology, 7, N.Y., 1980.
20. S.H.Nasr et al. Historical Atlas of Iran. Tehran, 1971.
21. D.Pingree. Review of [29]. Math. Reviews, 30 (July, 1965), no.5.
22. Ed.Sachau. Algebraisches über das Schach bei Bîrûnî. Zeitschrift d. Deutsche Morgenländische Gesellschaft, 29 (1876), p. 148-156.
23. C.Ed.Sachau (transl. and ed.). Al-Bîrûnî's Chronology of Ancient Nations. London, 1879.
24. A.S.Saidan. The arithmetic of al-Uqlîdisî. Dordrecht, 1975.
25. D.J.Struik (ed.). A source book in mathematics, 1200-1800, Cambridge, Mass., 1969.

26. G.B.Thomas. Calculus and analytic geometry, 2nd ed. Cambridge, Mass., 1956.
27. G.J.Toomer. Al-Khwārizmī. Dictionary of Scientific Biography. 7, N.Y., 1973, p. 358-365.
28. J.F.Traub. Iterative methods for the solution of equations. Englewood Cliffs, 1964.
29. K.Vogel (ed.). Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus, das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern, Aahen/Osnabruck, 1963. [В этом издании содержится факсимиле рукописи, из которого может быть получена правильная транскрипция.]