ОБ ИСТОКАХ ТЕОРИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ [ж)]

С.К.Клини

Мэдисон, США

Я мог бы озаглавить эту статью "Четыре дюжины лет в стране Рекурсии" (1979-1931=48). Когда меня пригласили прочесть лекцию на симпозиуме по основам вычислительной науки, мне было сказано, что слушателям интересно узнать, как возникла теория рекурсивных функций (и теория регулярных событий в теории конечных автоматов).

Мое интенсивное изучение оснований математики началось с курса лекций Черча в осенний семестр 1931-32 г. в Принстоне. Предыдущее знакомство с этой областью имело самый общий характер: я читал введение в математику Уайтхеда, 1911, и введение в математическую философию Рассела, 1919.

Курс лекций Черча представлял, за исключением одной вставки, изложение двух его статей (Черч, 1932 и 1933) под общим заглавием "Постулаты логических оснований".

Что это была за вставка? Осенью 1931 г. Джон фон Нейман выступал на математическом коллоквиуме; он предпочел говорить не о своих работах, а о результатах Геделя о формально недоказуемых предложениях. Фон Нейман предварительно ознакомился с ними на симпозиуме в Кенигсберге, в котором участвовали и фон Нейман, и Гедель. Этот материал был включен в курс. Одновременно я тщательно изучал статью Геделя в Monatshefte .

Эта статья содержит знаменитое геделевское доказательство существования неразрешимых суждений в формальных системах, содержащих обычную элементарную теорию чисел, и его "вторую теорему" о невозможности доказать непротиворечивость такой системы ее собственными средствами. Непосредственная реакция Черча состояла в том, что его формальная система, о которой

ж) Перевод по разрешению АФИПС с оригинала, опубликованного в "Annals of the Hystory of Computing", vol.3, No1. Предварительная версия статьи на которой основывалось выступление автора на "Алгоритмическом вечере" 22.9.1979, была представлена 20-му ежегодному симпозиуму по основаниям вычислительных наук (Сан Хуан, Пуэрто Рико , октябрь, 1979г.)

я скажу позже, достаточно отлична от систем, с которыми имел дело Гедель, чтобы "вторая теорема" Геделя была неприменима (см. Черч, 1933, с.843). В самом деле, Черч был прав! В его системе имеется доказательство ее собственной непротиворечивости, т.к. фактически она противоречива, так что все ее утверждения доказуемы; такую возможность Черч допускал (Черч, 1933, с.842), и это впоследствии было доказано мной и Россером (Клини и Россер, 1935).

Я уже писал (Клини, 1976) о статье Геделя, 1931, и о его работах вообще. В этой статье Гедель использовал как техническое средство класс числовых функций, которые он назвал рекурсивными и которые после моей статьи (Клини, 1936) об общерекурсивных функциях стали называться примитивно-рекурсивными. Сейчас я вкратце расскажу, что было известно о рекурсивных функциях в 1931 г., хотя вскоре еще раз вернусь к этой теме.

Нет ничего более привычного, чем пять аксиом Пеано для целых положительных чисел $\{1,2,3,\ldots\}$, опубликованных в его работах (Пеано, 1889 и 1891). Вместе с пятой аксиомой (математической индукции) он использовал определения по индукции - фактически, примитивную рекурсию. Название было предложено Петер, 1934. Аксиомы Пеано восходят к Дедекинду, 1888, который доказал теорему, что примитивная рекурсия определяет функцию на целых положительных числах, и применил ее к определениям функций: $m+n$, $m*n$, m^n . Для согласования с более привычным изложением этой теории мы можем перейти от целых положительных чисел $\{1,2,3,\ldots\}$ к натуральным числам $\{0,1,2,\ldots\}$, например, как у Геделя, 1931.

Богатство возможностей для развития теории чисел на этой основе было продемонстрировано Сколемом, 1923, в его статье, посвященной обоснованию элементарной арифметики "в рекурсивном стиле". Некоторые приемы, которые использовал Гедель, 1931, в связи с применением рекурсивных функций, были заимствованы оттуда.

Гильберт, 1926, предпринял смелую попытку доказать континуум-гипотезу Кантора, используя рекурсии возрастающей сложности для порождения числовых функций и сопоставления с ними возрастающих ординалов второго числового класса. Эта попытка провалилась, хотя кое-какие из его методов сохранились в геделевском доказательстве непротиворечивости континуум-гипотезы (Гедель, 1938, 1939, 1940). В ходе этой попытки Гильберт использовал пример функции, определяемой посредством трансфинитной рекурсии (или посредством одновременной рекурсии по двум переменным), для которой Аккерман, 1928, доказал, что она не является примитивно-рекурсивной.

Вот что было известно в 1931 г. Непосредственно после этого Петер предприняла интенсивную разработку этих вопросов в серии статей (Петер, 1932, 1934, 1936, 1937), описывающих иерархию ступеней рекурсивных функций: примитивно-рекурсивные функции, двукратно рекурсивные функции, трехкратно рекурсивные функции и т.д. Эта теория изложена в ее книге (Петер, 1951).

Наряду с этой теорией рекурсивных функций специального вида, основа для которых была заложена в 1931 г., существовали с древних времен, например, в Евклидовых "Началах" (около 330-320 гг. до н.э.), примеры алгоритмов, т.е. методов разрешения вопросов (предикатов) или вычисления функций. Название "алгоритм" является искажением имени арабского математика IX века аль-Хорезми (я принимал в сентябре 1979 г. участие в научном паломничестве на его родину - Хорезмский оазис в Узбекистане).

Как было уже сказано, в осеннем семестре 1931 г. одновременно с чтением статьи Геделя я слушал курс Черча и познакомился с его постулатами оснований логики. Я не буду говорить о них во всей полноте, однако они включали в себя один ингредиент, который оказался весьма плодотворным.

При обычном преподавании анализа студенты младших курсов приступают к изучению функций, некоторым из которых даются простые имена - постоянные, например, "sin", или временные, например, "f"; другие же задаются посредством выражений, например, "x^4+3x^2+2", содержащих переменную x и указывающих значение функции для каждого значения этой переменной в качестве аргумента.

Изучающий анализ студент вряд ли затруднится в вопросе: обозначает ли выражение "x^4+3x^2+2" некоторое число, зависящее от числа x, обозначаемого переменной "x", или функцию. То, что здесь есть некоторая неопределенность (действительно, "x^4+3x^2+2" называют неопределенным значением указанной функции), можно проиллюстрировать путем сравнения двух высказываний: "$x^4+3x^2+2>2$" и "x^4+3x^2+2 – четная функция" (f называется четной, если для всех x имеет место $f(-x)=f(x)$). Первое утверждение относится к любому из чисел, являющихся значением данной функции. Второе относится к самой этой функции.

Указанную неопределенность можно устранить, используя обозначение "$\lambda x[x^4+3x^2+2]$" для самой функции, где "x" связывается префиксом "λx".

Как только введено это обозначение – возникает три очевидных операции, связанных с ним (для простоты, я впредь буду опускать кавычки). Во-первых, если $f=\lambda x[x^4+3x^2+2]$, то $f(2)=2^4+3(2^2)+2=30$, таким образом, если не вводить f, получаем выражение $\{\lambda x[x^4+3x^2+2]\}(2)$, которое сводится эквивалентным образом к $2^4+3(2^2)+2$. Во-вторых, $2^4+3(2^2)+2$ обобщается эквивалентным образом до $\{\lambda x[x^4+3x^2+2]\}(2)$ (а также к различным другим выражениям, например, $\{\lambda x[x^4+3x^2+x]\}(2)$). В-третьих, имеет место обычный принцип, что связанную переменную можно заменить на любую другую с той же областью значений, если только это не приводит к "коллизиям" (в более сложных случаях). Таким образом, наше выражение $\lambda x[x^4+3x^2+2]$ означает то же, что и $\lambda y[y^4+3y^2+2]$.

Этот прием использования λ-обозначений с указанными операциями так прост, что удивительно, почему бы какой-нибудь хороший студент сам не додумался до него.

Черч ввел λ-обозначение в контексте своей системы постулатов. В моем примере $\lambda x[x^4+3x^2+2]$ этим контекстом является арифметика вещественных чисел, в которую введены некоторые константы, например, 2 и 3, и некоторые функции, уже получившие обозначения, например, сумма и произведение. Это приводит нас к замечанию, что для того чтобы сделать λ-исчисление точным, нам надо предварительно описать класс осмысленных выражений, в связи с которым мы будем его использовать.

Будем достаточно смелыми и введем в рассмотрение некий минимальный язык – всего лишь с одним видом переменных – без типов и сортов, – являющихся атомами, запас которых будем считать неограниченным. Мы получим этот язык из формализма Черча, удаляя остальные его элементы, которые для наших целей не понадобятся. (В моей статье (Клини, 1934) я делал то же самое, когда рассматривал одинаковым образом константы и переменные, называя те и другие "собственными именами".)

Осмысленные формулы, полученные таким способом, я называю λ-формулами*). Во-первых, все переменные суть λ-формулы. Во-вторых, если P - уже построенная λ-формула, содержащая $\underline{x}$ в качестве свободной переменной, то $\lambda\underline{x}[P]$ тоже λ-формула. (Существует другая версия этой теории, называемая λ-K-исчислением, в которой не требуется, чтобы P содержала $\underline{x}$ свободно.) Я предполагаю, что читатель понимает, что такое свободное и связанное вхождение переменной, коль скоро $\lambda\underline{x}$ есть единственный связывающий оператор; я мог бы дать это определение одновременно с определяемым классом λ-формул. Мы будем понимать $\lambda\underline{x}[P]$ как обозначение для функции от $\underline{x}$, значение которой (если оно определено) для каждого значения $\underline{x}$ есть значение, которое принимает P при этом $\underline{x}$. В-третьих, если M и N - λ-формулы, то таковой же является $\{M\}(N)$. Мы понимаем $\{M\}(N)$ как результат применения функции M к аргументу N. λ-формулами являются те и только те выражения, которые оказываются таковыми при повторном применении этих правил. Это пример "индуктивного определения": класс объектов (в нашем примере λ-формул) определяется как содержащий все объекты, которые требуется включить в него в силу повторного применения некоторых правил (в нашем примере эти правила начинаются словами: во-первых, во-вторых, в-третьих), и не включает никаких других элементов.

Далее, имеются три операции, посредством которых можно преобразовать λ-формулу не меняя смысла; я их иллюстрировал выше, но сейчас представлю в общем виде применительно к нашему упрощенному языку. Во-первых, имеется редукция, посредством которой $\{\lambda\underline{x}[P]\}(N)$ заменяется на результат $S^{x}_{N}P|$ подстановки N вместо свободных вхождений $\underline{x}$ в P в предположении, что не получается "коллизий" переменных. Во-вторых, имеется обобщение, т.е. обращение редукции. В-третьих, имеется переименование связанных переменных: $\lambda\underline{x}[P]$ заменяется на $\lambda y[S^{x}_{y}P|]$, если нет "коллизий". Каждый из этих шагов может быть сделан

*) Более принято говорить о λ-термах. (Прим. перев.)

применительно ко всей λ-формуле или ее связной части, которая сама есть λ-формула, с тем исключением, что мы не можем применять обобщение к переменной $\underline{x}$, входящей в префикс $\lambda\underline{x}$, как я заметил (Клини, 1934) в моем исправлении формулировки Черча.

Как я сказал, это и многое другое имелось у Черча в изложении его языка и постулатов. Но все другое мы оставим в стороне. До начала исследований никто не догадался бы о богатстве рассматриваемой подсистемы; кто бы мог угадать, что эта формулировка, возникающая, как я уже сказал, для того, чтобы сделать более ясным обозначение функции, неявно содержит в себе понятие, неизвестное в математике в 1931 г. в точной форме: понятие произвольной функции на положительных целых числах или на натуральных числах, для вычисления которой существует алгоритм?

В связи с этим требуется, чтобы целые положительные (и натуральные) числа были идентифицированы в классе λ-формул.

Прежде чем указать идентификацию, предложенную Черчем, мне необходимо ввести некоторые сокращения: $\lambda\underline{x}[P]$ будет часто записываться $\lambda\underline{x}.P$ или просто $\lambda\underline{x}P$, а $\{M\}(N)$, когда M является единственным символом, можно упрощенно записывать как $M(N)$; можно также сократить $\lambda\underline{x}[\lambda y[P]]$ до $\lambda\underline{x}y[P]$ или $\lambda\underline{x}y.P$ или $\lambda\underline{x}yP$; $\{[M](N)\}(P)$ может быть сокращено до $\{M\}(N,P)$ или $M(N,P)$. Здесь используется полезное определение Шенфинкеля, 1924, двухместных функций через одноместные (однако обозначение $\lambda\underline{x}y[P]$ впервые появилось у Клини, 1934). Аналогично можно поступить при большом числе переменных (для функций от p переменных при $p>2$).

Если A и B суть λ-формулы, я буду писать "A red B" (читается "A сводимо к B"), чтобы указать, что A преобразовано в B посредством нуля или более редукций вышеописанной формы, т.е. замены $(\{\lambda\underline{x}[P]\}(N)$ на $S^{x}_{N}P|$ во всей формуле или ее части) вместе с нулем или более переименований связанных переменных (это определение соответствует моему теперешнему изложению; в свое время в литературе мы использовали вместо этого "A conv B" , т.е. "A преобразуется в B" , где допускались также обобщения. Для результатов, о которых здесь будет идти речь, будет ясно из построения, что они сохраняются при замене "red" на "conv").

Если и только если для B никакие редукции невозможны, как непосредственно, так и после переименования связанных переменных, будем говорить, что B находится в нормальной форме, и если при этом справедливо A red B , то B есть нормальная форма для A (эти понятия были введены в лекциях Черча в 1931 г.).

Черч отождествил целые положительные числа 1,2,3... со следующими λ-формулами (в нормальной форме):

$$\lambda fx.f(x),\ \lambda fx.f(f(x)),\ \lambda fx.f(f(f(x))),\ldots \qquad (1)$$

Здесь я использую "курсивные" буквы "f" и "x" как конкретные переменные, тогда как подчеркнутые буквы ("прямой" шрифт) "$\underline{x}$" и "$\underline{y}$" были именами произвольных переменных (различными для различных переменных).

Начиная со статьи Клини, 1936-а, я отождествляю с λ-формулами (1) натуральные числа 0,1,2... отчасти потому, что примитивно-рекурсивные и общерекурсивные функции, заимствованные у Геделя, были определены на натуральных числах, но сейчас, поскольку я говорю об исследованиях вплоть до 1935 г., легче будет придерживаться обозначений Черча, нежели постоянно оговаривать различия с ними.

Я называю λ-формулы (1)- нумералами и, в частности, $\lambda fx.f(x)$ - нумералом для 1, $\lambda fx.f(f(x))$ - нумералом для 2 и т.д. Если я буду использовать обозначение "n" для какого-нибудь целого положительного числа, то "cn" будет обозначать соответствующий нумерал.

Теперь само собой напрашивается следующее: каждую λ-формулу F , которая не содержит свободных переменных, можно проинтерпретировать как частичную одноместную функцию φ , заданную на целых и положительных числах и принимающую такие же значения, как сейчас будет объяснено. (Частичной называется такая функция, что для каждого целого положительного n либо φ(n) определена и принимает целое положительное значение, либо она не определена.)

Частичные функции впервые были явно использованы в теории рекурсии в моей статье (Клини, 1938) (применительно к натуральным числам). То, о чем я сейчас буду говорить, первоначально было сформулированно в 1931-32 гг. в виде условия, при котором λ-формула определяет обычную "тотальную" одноместную функцию на целых положительных числах.

Частичная функция φ, которую выражает λ-формула F без свободных переменных, такова, что для каждого n $\varphi(n)=m$ или $\varphi(n)$ не определено, смотря по тому, имеет ли место F(cn) red cm или нет. То, что таким образом действительно определяются некоторые частичные однозначные функции, зависит от существования не более чем одного m (для данных F и n), такого, что F(cn) red cm. В то время, о котором я говорю, наша уверенность в этом была основана на содержательном понимании λ-исчисления или полной системы Черча. Впоследствии в 1936 г. была доказана теорема Черча-Россера, в силу которой A red B, где B имеет нормальную форму, может выполняться при данном A не более чем для одного B с точностью до обозначения связанных переменных. Тем самым, для данных F и n, F(cn) red cm справедливо не более чем для одного m.

Будем говорить, что формула F только что указанного вида λ-определяет функцию φ и что эта функция λ-определима (эта терминология не была опубликована вплоть до статей Черча, 1936, и Клини, 1936-а, но мы использовали это понятие с 1931-32 гг.). Аналогичное определение можно дать для функций многих переменных, полагая $\varphi(n_1,\ldots,n_p)=m \equiv F(cn_1,\ldots,cn_p)$ red cm.

Если F содержит свободные переменные, то ни для каких n и m не может быть F(cn) red cm, потому что последовательность редукций не меняет множества свободных переменных; значит, такая F попросту λ-определяет нигде не определенную функцию.

Предложенная Черчем идентификация λ-формул (1) с 1,2,3... была выбрана в связи с удобством для индуктивных определений. Так, если F есть λ-формула $\lambda n.n(G,A)$, то F(cn) для n=1,2,3... сводится соответственно к

$$G(A), G(G(A)), G(G(G(A))), \ldots \qquad (2)$$

Можно сказать, что последовательность (2) λ-формул λ-определяется посредством такого F. В случае, когда A имеет в качестве своей нормальной формы нумерал ca, а G λ-определяет тотальную функцию ϕ, формула F λ-определяет функцию, последовательные значения которой суть $\phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \ldots$.

Черч в своих лекциях 1931-32 гг., а также в статье (Черч, 1933, с. 863) дает два примера λ-определимых тотальных функций. Первый пример - это функция следования S (где S(n)= =n+1), которая λ-определяется как λnfx.f(n(f,x)) - назовем это выражение "S". Проверим для иллюстрации, что при n=2 S(2) red 3 . После перехода к несокращенным выражениям для S и 2 получаем

{λnfx.f({{n}(f)}(x))}(λfx.f(f(x))) red,

λfx.f({{λfx.f(f(x))}(f)}(x)) red,

λfx.f({λx.f(f(x))}(x)) red λfx.f(f(f(x))).

Вторым примером является сумма m+n , которая, как легко видеть, λ-определяется выражением λmn.n(S,m) (обозначаем его "+").

Среди постулатов Черча были предусмотрены средства для выражения пропозициональных функций (предикатов) и описан оператор i, такой, что i(F) означает "такое x̲ , для которого F(x̲)", при этом i(λx̲[G]) сокращается до ix̲[G] или ix̲.G . Установив λ-определимость S и + , Черч не давал λ-определений для других функций, вместо этого он дал для вычитания и для произведения - соответственно формулы λrs.ix[{+}(x,s)=r] и λmn.{-}(m(n(S),1),1) , используя дескриптивный оператор i .

Заметим, что все λ-определимые функции, в отличие от некоторых функций, определяемых, например, посредством i-символов Черча и других констант, "эффективно вычислимы", т.е. вычислимы с помощью алгоритмов.

Чтобы подтвердить это, я могу еще раз сослаться на теорему Черча-Россера, 1936 г., которая помимо того, что я говорил выше, утверждает, что если мы получали A red B , где B находилось в нормальной форме, посредством некоторых последовательных редукций с переименованием связанных переменных, то любая другая такая последовательность при ее достаточном продолжении или даже любая такая последовательность, которой предшествует несколько обобщений, чередующихся с редукциями, в конце концов приведет к B , если не считать отличий в обозначениях связанных переменных.

Итак, если мы ограничимся тотальными функциями, алгоритм для вычисления функции φ, λ-определимой посредством F , состоит в следующем. Для данного n ищем самую левую часть $F(cn)$, имеющую вид $\{\lambda \underline{x}[P]\}(N)$, и применяем к ней редукцию, переименовав, в случае необходимости, связанные переменные. Затем повторяем эту же процедуру. Этим полностью определяется процесс вычисления (исключая детали, связанные с переименованием переменных, которые тоже можно было бы детерминировать посредством подходящих соглашений). Мы могли бы варьировать этот процесс, не влияя на факт остановки и на результат: каждый раз, когда имеется более чем одна часть вида $\{\lambda \underline{x}[P]\}(N)$, выбирая для редукции ту или другую из этих частей.

Для частичных функций эффективная вычислимость φ означает, что существует алгоритм, который после конечного числа шагов ведет к значению $\varphi(n)$ для каждого n , при котором это значение определено, а для всех других n не приводит ни к какому другому значению (либо останавливаясь в ситуации, когда никакого значения не выдается, либо работая бесконечно долго).

Мое изучение класса λ-определимых функций происходило следующим образом. По окончании курса лекций Черча, в январе 1934 г., я выбрал в качестве темы докторской диссертации разработку теории целых положительных чисел в его формальной системе (Черч, 1932 и 1933), точнее, я взялся за первую часть этой темы, предложенную на последней странице его статьи (Черч, 1933). Речь шла о доказательстве аксиом Пеано в формализме Черча.

Доказательства трех из них были непосредственно очевидны, хотя пятую аксиому я сформулировал несколько по-другому, нежели Черч (Клини, 1935, с. 157).

Однако третья аксиома (если последователи двух чисел равны, то равны и сами числа) оказала сопротивление. Я предполагал справиться с ней, определив функцию предшествования P (т.е. $P(1)=1, P(S(n))=n$) в рассмотренной системе, используя только λ-исчисление.

Почти сразу же я заметил, как можно было бы изменить идентификацию чисел с λ-формулами, чтобы функция предшествия получилась непосредственно. Когда я показал это Черчу, он ответил, что мое альтернативное определение чисел нежелательно, потому что то, которое было им предложено, было специально подобрано, чтобы годиться для индуктивных определений (как было указано в (2) и проиллюстрировано на примере λ-определимости сложения). Я мог бы возразить на это, исследовав, не является ли в действительности моя идентификация столь же хорошей для индуктивных определений и дальнейших построений. Но я этого не сделал. Тот факт, что я этого не сделал и не использовал λ-K -исчисление вместо λ-исчисления, можно расценивать как то, что я разрабатывал λ-определимость в более трудной версии, но может быть в более привлекательной как раз благодаря оказываемому ею сопротивлению. Тридцать один год спустя, в письме от 20 января 1963 г., Дана Скотт сообщил мне некую альтернативную идентификацию целых положительных чисел с λ-формулами, непосредственно дающую определение для функции предшествования (ту же самую или подобную моей индентификации 1932 г., от которой не сохранилось записи), и наметил дальнейшее развитие теории с использованием этой альтернативы. Я не в такой степени знаком с работами Скотта и других современников, чтобы судить в 1979 г., какая из этих теорий является лучшей.

Вскоре после возвращения к идентификации Черча, в конце января или начале февраля, когда я был у зубного врача, мне пришла в голову мысль, что я мог бы определить функцию предшествования посредством λ-определения (2) $\lambda n.n(G,A)$ по следующим формулам. Упорядоченные тройки чисел (n_1,n_2,n_3) можно представить λ-формулами $\lambda fghx.f(\ldots f(g(\ldots g(h(\ldots h(x)\ldots\ldots))\ldots))\ldots)$, где f, g, h входят соответственно n_1, n_2 и n_3 раз, не считая их вхождения в префикс $\lambda fghx$. Нетрудно построить λ-формулу G, которая осуществляет следующую операцию над числовыми тройками:

$$\begin{array}{ccc} (n_1, & n_2, & n_3) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ (n_2 & n_3 & S(n_3)) \end{array}$$

Тогда, если A есть $(1,1,1)$, то $\lambda n.n(G,A)$ λ-определяет последовательность троек

$$(1,1,2),(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),\ldots . \qquad (3)$$

Теперь легко посредством некоторой λ-формулы H удалить из каждой тройки все числа, кроме первого, и тогда получим:

$$1,1,2,3,\ldots, \tag{4}$$

что и является последовательностью значений функции предшествования P. Значит P λ-определима посредством $\lambda n.H(n(G,A))$; назовем это выражение "P". Когда я сообщил этот результат Черчу, он ответил мне, что уже примирился с тем, что не существует λ-определения для функции предшествования.

Обнаружение того, что функция предшествования оказалась в конце концов λ-определимой, сильно повысило наш интерес к тому, какие же функции не просто выразимы в полной системе, но именно λ-определимы. Исследование этого вопроса составило самостоятельный большой раздел. Конечно, значительная часть теории натуральных чисел в формализме Черча была мною разработана с использованием λ-определений.

В промежутке между представлением моей диссертации (сентябрь 1933 г.) и ее публикацией (Клини, 1935), Россер и я установили, что полная формальная система Черча противоречива. Подозрение возникло осенью 1933 г., окончательно оправдалось весной 1934 г., а затем опубликовано (Клини и Россер, 1935). Тогда же (весной 1934 г.) я переписал свою диссертацию, чтобы сохранить, во-первых, ту часть теории Черча, средствами которой была доказана противоречивость всей теории, во-вторых, обосновать теорию λ-определимых функций независимо от теории Черча, опираясь на теорему Черча-Россера. Когда стало понятно, что полная система противоречива, Черч высказал мысль о важности λ-определимости (рассматриваемой независимо от логики) как понятия теории чисел. (Понимание этой важности не было чуждо мне самому. На стр. 23 рукописи моей диссертации, в том виде, в котором она была представлена к печати 9 октября 1933 г. - до ее пересмотра, имеется утверждение, что все формальные определения в этой диссертации в действительности являются λ-определениями).

Теперь я кратко резюмирую, как продвигались исследования в вышеупомянутой теме (обоснование арифметики в терминах λ-определимости), начиная с февраля 1932 г. Черч и я знали, что только эффективно вычислимые функции могут быть λ-определимыми. Мы интересовались только конкретными функциями и специальными операциями получения одних функций из других. Мною была установлена λ-определимость ряда функций и сохрание λ-определимости при некоторых операциях.

Шенфинкель, 1924, и Карри, 1929, 1930, 1932, разработали комбинаторную логику, в которой переменные не использовались, будучи заменены константами, позволяющими обойтись без переменных. Россер в своей докторской диссертации, выполненной под руководством Черча (Россер, 1935), установил связь между этой теорией и λ-исчислением. В россеровской версии комбинаторной логики достаточно двух констант I и J, которые переводятся на язык λ-исчисления как $\lambda x.x$ и $\lambda fxyz.f(x,f(z,y))$. Таким образом, в комбинаторной логике выражение $J(F,X,Y,Z)$ сводится (само по себе или как часть более сложного выражения) к $F(X,F(Z,Y))$ точно так же, как в λ-исчислении имеет место аналогичная сводимость для $\{\lambda fxyz.f(x,f(z,y))\}(F,X,Y,Z)$. Будем называть формулы, получающиеся в λ-исчислении при помощи лишь переменных, I и J, "комбинаторными формулами". Таким образом, переменная есть комбинаторная формула. I и J (переведенные на язык λ-исчисления) суть комбинаторные формулы. Если M и N – комбинаторные формулы, то такова и $\{M\}(N)$. Комбинаторными формулами являются те и только те выражения, которые получаются повторным применением этих трех правил. Термами считаются вхождения в комбинаторную формулу переменных и выражений для I и J.

Согласно результатам Россера (уже известным мне весной 1932 г.) для каждой λ-формулы A существует комбинаторная формула A', такая, что A' red A. (Фактически, мною было заимствовано у Россера A' conv A. Но даже не разбираясь в россеровской аргументации, можно показать, что A' red A посредством индукции по построению A. Рассмотрим случай, когда A есть $\lambda \underline{x} P$. По предположению индукции существует P', такое, что P' red P. Допускаем, что P' состоит из термов $t_1,\dots,t_n$, каждый из которых есть либо x, либо какая-нибудь другая переменная, либо одна из констант I и J. Заменим в P' каждый из термов $t_1,\dots,t_n$, совпадающих с I или J, на новую переменную и получим P". Согласно результату Россера существует комбинаторная формула R", такая, что R" conv $\lambda \underline{x}$P". Однако $\lambda \underline{x}$P" находится в нормальной форме, так что по теореме Черча-Россера R" red $\lambda \underline{x}$P". Если мы снова заменим в этой редукции каждую переменную, которая в P" представляла терм I или J ,на соответствующую константу,то последовательность редукционных шагов,связанных с этими переменными,остается в силе. Таким образом,сделав соответствующую замену в R" и получив некоторое R' ,мы будем иметь R' red $\lambda\underline{x}$P' red λxP . Базис и индукционный шаг для {M}(N) получаются непосредственно).

В один вечер весной 1932 г., когда я слушал концерт в Принстоне, я увидел, как это можно использовать, чтобы установить (inter alia)[ж)], что если A и B какие-нибудь λ-формулы с одними и теми же свободными переменными,то существует λ-формула L,такая, что L(1) red A и L(2) red B . Идея построения L заключается, во-первых, в замене A и B комбинаторными формулами A' и B' , такими, что A' red A и B' red B. Термы, входящие в эти комбинаторные формулы, могут быть явно выписаны. Получающийся общий список термов, в котором однако каждая переменная перечислена только один раз, можно перестроить в λ-формулу L со следующим свойством: если L применяется к нумералу 1 , термы, происходящие из A', занимают те места, которые они имели в первоначальной формуле A , в то время как термы, получившиеся только из B (отличные от переменных), исчезают; аналогично - при применении к 2 (Клини, 1934, с. 537-538). Такой вид определения разбора случаев был очень полезным.

Для иллюстрации рассмотрим задачу λ-определения функции φ, заданной посредством примитивной рекурсии простого вида $\varphi(1)=a,\varphi(s(n))=\phi(\varphi(n))$. Предполагая, что функция ϕ определяется посредством G , мы хотим дать λ-определение последовательности λ-формул вида

$$A,G(A),G(G(A)),G(G(G(A))),\dots . \tag{5}$$

Разумеется, если A сводимо к нумералу, а G λ-определяет тотальную функцию, A и G не должны содержать свободных переменных. Но в теории λ-определимости мы можем и должны рассматривать λ-определимость этой последовательности лишь при одном очевидном условии, что все свободные переменные G являются свободными переменными A . Короче говоря, мы хотим вставить A в начало последовательности λ-формул (2) .(Если б мы идентифицировали целые положительные или натуральные числа выражениями $\lambda fx.x, \lambda fx.f(x), \lambda fx.f(f(x)),\dots$ в рамках λ-K -

ж) между прочим (лат.) - Пр. перев.

исчисления, то (5) вместо (2) получилось бы непосредственно.) Рассмотрим сначала какую-нибудь λ-формулу F с теми же свободными переменными, что и A . Посредством разбора случаев можно получить формулу L , такую, что L(1) red F и L(2) red λn.n(I,A) . Пусть F' есть λn.L(n(P,3),P(n)) . Легко видеть, что для n=1,2,3,..., F(cn) сводится к

$$A,F(1),F(2),F(3),\ldots \qquad (6)$$

Значит, если F есть λn.n(G,A) , которая λ-определяет (2) , то F' есть искомая λ-формула, определяющая (5) .

Рассмотрим общую форму примитивной рекурсии для функции одной переменной: φ(M)=a,φ(S(n))=ψ(n,φ(n)) . Теперь нам нужно определить

$$A,G(1,A),G(2,G(1,A)),\ldots \qquad (7)$$

Допустим в (5) A и G равными λn.n(I,A) и λrn.G(n,r(P(n))) и для F' , λ-определяющей (5) , положим F" равным λn.F'(n, P(n)) ; нетрудно показать, что F" λ-определяет (7) .

Чтобы закончить эту серию примеров, возьмем примитивную рекурсию с параметром: φ(1,x)=α(x),φ(S(n,x))=ψ(n,φ(n,x),x). Нам нужна λ-формула F"' , такая, что для n=1,2,3,... , и любого x F"'(cn,x) сводится соответственно к (8) :

$$A(cx),G(1,A(cx),cx),G(2,G(1,A(cx),cx),cx),\ldots \qquad (8)$$

В качестве A и G возьмем A(x) и λnr.G(n,r,x), и тогда нужная F"' есть λnx.F"(n).

Я рассмотрел также некоторые варианты схемы примитивной рекурсии, о которых ныне известно из работ Петер, 1934,и других (см. Клини, 1952, гл. IX), и показал, что они сводимы к примитивной рекурсии, а затем для примера рассмотрел также двукратную рекурсию.

Напрягая свой мозг в поисках новых примеров эффективных определений, для которых можно было бы попытаться доказать их λ-определимость, я додумался до оператора минимизации, который, начиная с Клини, 1938, обозначается через "μy" . Если R(x,y) есть тотальное (полностью определенное) эффективно разрешимое отношение и для каждого x существует y , такой, что R(x,y) , то μyR(x,y) есть тотальная функция φ(x),которую я признал эффективно вычислимой, даже если невозможно заранее указать границы для y . (Если для каждого x можно указать границу ψ(x) для соответствующего y , то определение φ(x) можно описать примитивно-рекурсивным образом относительно $R(x,y)$ и $\phi(x)$, как было известно из работ Сколема, 1923 и Геделя, 1931.) В противном случае, если только $R(x,y)$ эффективно разрешимо, $\mu y R(x,y)$ есть эффективно вычислимая частичная функция.

Многие дескриптивные определения функций на целых положительных числах могут быть выражены в терминах μ-оператора.

Чтобы включить $\mu y R(x,y)$ в λ-исчисление, предположим, что отношение $R(x,y)$ представимо λ-формулой $\underline{R}$, где $\underline{R}(cx,cy)$ red 2, если $R(x,y)$ – истинно, и $\underline{R}(cx,cy)$ red 1, если $R(x,y)$ – ложно. Я построил λ-формулу ρ, такую, что если $D(ck)$ red 2, то $\rho(D,ck)$ red ck и если $D(ck)$ red 1, то $\rho(D,ck)$ red $\rho(D,ck+1)$. Таким образом, $\rho(\underline{R}(cx),0)$ red cy для наименьшего y, такого, что $\underline{R}(cx,cy)$ red 2 и каждая из $\underline{R}(cx,0),\ldots,\underline{R}(cx,cy-1)$ red 1. Итак, $\lambda \underline{x}\, \rho(\underline{R}(\underline{x}),0)$ λ-определяет $\rho y R(x,y)$. "ρ" обозначает механизм, чем-то аналогичный вечному двигателю: если $D(ci)$ red 1 для всех i, то $\rho(D,0)$ red $\rho(D,1)$ red $\rho(0,2)$ и так далее до бесконечности.

Этот результат сильно расширил наши возможности выражения эффективных определений в виде λ-определений. Далее стало ясно, что многие частные проблемы элементарной теории чисел сводятся к проблеме, имеет ли данная λ-формула C нормальную форму (см. Клини, 1935, с. 232-233, Черч, 1936, с. 358-359). В некотором смысле это наблюдение заложило основу для доказательства неразрешимости этой проблемы, полученного Черчем, 1936, и для проблемы остановки машин Тьюринга (см. Клини, 1952, с. 382).

Вслед за написанием и переработкой моей диссертации и до 1 июля 1935 г. я думал о том, что в моей книге я назвал "теоремой о рекурсии" (Клини, 1938, 1952, с. 352-353), которую я установил для λ-исчисления, назвав ее "циклическим определением" (см. Клини, 1936-а, формула 19 на с. 346 и обсуждение на с. 347). Для каждой λ-формулы G и для каждого положительного числа p существует λ-формула F, такая, что для любых $x_1,\ldots,x_p$

$$\{F\}(cx_1,\ldots,cx_p) \text{ red } \{G\}(F,cx_1,\ldots,cx_p).$$

Кроме того, если G не содержит свободных переменных, то найдется λ-формула H, такая, что $H(F)$ red I, что позволяет нам убрать F , если это нужно (например, если G представляет из себя определение разбором случаев, и F не используется во всех случаях).

Теорема о рекурсии охватывает совершенно общую форму рекурсии. Если некоторая функция φ определяется посредством такого указания, что любое значение $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$ получается путем оперирования с аргументами $x_1,\ldots,x_p$ и самой функцией φ при помощи данного функционала ϕ, и ϕ является λ-определимым (если очевидным образом понятие λ-определимости распространить на функционалы), то теорема утверждает, что такая φ будет λ-определима. Вообще говоря, так определенная φ будет частичной – так что теорема отделяет вопрос о λ-определимости φ (решенный положительно) от вопроса о том, на каких наборах аргумента она определена (возможно ни на одном). На самом деле G не обязано быть λ-определением некоторого функционала ϕ, поскольку $\{G\}(F,cx_1,\ldots,cx_p)$ может быть сводимо к нумералу, зависящему от самой λ-формулы F , а не от той функции, которую она определяет.

В статье Клини, 1936-а, теория λ-определимости была переработана с самого начала, чтобы сразу получить определение разбором случаев и теорему о рекурсии, а примитивные рекурсии и оператор минимизации получаются как приложение теоремы о рекурсии, что было мной использовано в 1951 г. при изучении самовоспроизводящих автоматов фон Неймана.

Вернемся ненадолго в 1933 г., чтобы посмотреть, как была связана λ-определимость с другими исследованиями. Понятие λ-определимости полностью сложилось осенью 1931 г. и находилось в обращении среди логиков Принстона. Размышляя над этим понятием, Черч в конце концов выдвинул предположение, что λ-определимые функции – это в точности все вычислимые функции – что было опубликовано в статье Черча, 1936, и что в моей книге 1952 г. – глава XII – (а фактически в 1943 г.) я назвал "тезисом Черча".

Когда Черч высказал этот тезис, я попытался его опровергнуть посредством диагонализации класса λ-определимых функций. Но поскольку легко выяснилось, что эта диагонализация не может быть эффективно проведена, я немедленно стал сторонником этого тезиса.

Осенью 1933 г. Гедель перешел в Институт перспективных исследований. Согласно письму Черча ко мне от 29 декабря 1935 г. Гедель считал совершенно неудовлетворительным предложение Черча использовать λ-определимость как определение эффективной вычислимости. Черч ответил, что если Гедель предложит любое другое определение вычислимости, которое хотя бы отчасти будет удовлетворительным, то он – Черч – берется доказать, что оно содержится в λ-определимости.

Еще до того в своих лекциях 1934 г. Гедель предложил свою версию эффективности, представляющую собой модификацию идеи, высказанной Эрбраном в 1933 г. Результатом было то, что ныне называется "эрбран-геделевским определением рекурсии".

Предложение Эрбрана, как сообщает Гедель в статье 1934 г., состояло в следующем: если φ обозначает неизвестную функцию, а $\phi_1,\ldots,\phi_k$ известные функции, и если φ и все эти ϕ могут быть подставлены друг в друга произвольным образом, и некоторые пары полученных выражений соединяются знаком равенства, то если полученная система функциональных уравнений имеет одно и только одно решение для φ, то φ есть рекурсивная функция.

Модификация Геделя, помимо некоторых уточнений, касающихся вида уравнений, заключалась в требовании, чтобы для каждого набора натуральных чисел $x_1,\ldots,x_p$ было бы выводимо в точности одно равенство вида $\varphi(cx_1,\ldots,cx_p)=cm$ (где нумералы берутся в подходящем символизме) по правилам подставки и замены из множества функциональных уравнений и из равенств, дающих значения $\phi_1,\ldots,\phi_k$, предполагая, что эти функции уже определены аналогичным образом.

15 февраля 1965 г. в письме к Мартину Девису Гедель писал: "Однако к моменту чтения этих лекций (1934 г.) я не был вполне уверен, что мое понятие рекурсивности включает все возможные рекурсии..".

В моих работах (Клини, 1936 и 1943, см. также Клини, 1953, с. 274-275), я отредактировал некоторые детали этого определения, в частности, собрав воедино все уравнения, определяющие $\phi_1,\ldots,\phi_k$ и φ в систему уравнений E, являющуюся рекурсивным определением φ.

Черч, 1936, и Клини, 1936-а, опубликовали доказательство эквивалентности эрбран-геделевского определения общей рекурсивности и λ-определимости. Таким образом, согласно тезису Черча, в распоряжении математиков оказалось два точных определения интуитивного понятия эффективно вычислимой функции, или функции, вычислимой посредством алгоритма, которое до сих пор иллюстрировалось многочисленными примерами, накопленными за двухтысячелетнюю историю математики.

Меня часто спрашивают, каким образом я получил теорему о нормальной форме для общерекурсивных функций (Клини, 1936). (Начиная с 1936 г., я работал с натуральными числами, а не с целыми положительными). Эта теорема включает в себя утверждение, что каждую общерекурсивную функцию можно получить при помощи только примитивных рекурсий (вместе с явными определениями) и оператора минимизации (используемого только один раз).

Я был уже подготовлен своими работами по λ-опредлимости к тому, чтобы мыслить в терминах этих понятий. В моей диссертации я выяснил, что все примитивные рекурсии, как и явные определения, могут быть описаны в λ-исчислении и то же самое верно для оператора минимизации. Темой статьи Клини, 1936-а, было, в частности, доказательство того, что любая λ-определимая функция рекурсивна, поэтому я не мог не заметить, что этот результат был бы получен, если бы я мог представить любую общерекурсивную функцию как некоторую комбинацию примитивных рекурсий (в сочетании с явными определениями) и операторов минимизации.

Исходя из этого, я пришел к идее, состоящей, примерно, в следующем: во-первых, мы можем представить себе этапы вычисления функции φ (в нашем случае - это процесс вывода из системы равенств E рекурсивно определяющей φ) посредством геделевских номеров и охарактеризовать полученные таким образом числа примитивно-рекурсивным образом. Я хорошо знал метод геделевских номеров со времени изучения мною его статьи (Гедель, 1931). Затем мы можем, посредством оператора минимизации, попытаться найти наименьшее число y , описывающее такой шаг, который примитивно-рекурсивным образом распознается как заключительный шаг вычисления значения φ для данных аргументов $x_1,\ldots,x_p$. Наконец, если такое y найдено, то из него можно примитивно-рекурсивно извлечь искомое m. В этом процессе система равенств E, рекурсивно определяющих φ, представляется своим геделевским номером e. Используя эти номера, как параметры, мы можем любую рекурсивную функцию φ выразить в форме

$$\varphi(x_1,\ldots,x_p)=U(\mu y T(e,x_1,\ldots,x_p,y))$$

для некоторого натурального числа e, где U есть фиксированная примитивно-рекурсивная функция, а T – фиксированный $p+2$ местный примитивно-рекурсивный предикат. В этом и заключается улучшенная версия моего доказательства (Клини, 1943). В такой версии этот метод пригоден непосредственно к любой известной характеризации эффективно вычислимых функций, например, к λ-определимости и Тьюринговой вычислимости. (В Клини, 1936, вместо того, чтобы характеризовать примитивно-рекурсивным образом геделевские номера самих выводов, я нумеровал выводимые равенства. Здесь впервые возникла идея рекурсивно-перечислимого множества.)

Указанное выше равенство выполняется для данной общерекурсивной функции φ при некотором e, являющемся геделевским номером E, для всех $x_1,\ldots,x_p$; это зависит от данной выше формулировки, согласно которой система равенств E рекурсивно определяет φ тогда и только тогда, когда для любых $x_1,\ldots,x_p$ существует одно m, для которого равенство вида $\varphi(cx_1,\ldots,cx_p)=cm$ выводимо из E.

В статье Клини, 1938 (а на самом деле выполненной в 1936 г.), мне осталось убрать это предположение относительно E и говорить просто о таких наборах $x_1,\ldots,x_p$, для которых существует m, такое, что равенство $\varphi(cx_1,\ldots,cx_p)=cm$ выводимо из E (все еще предполагая единственность этого m). Тогда $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$ оказывается частичной функцией. Так определенные функции я назвал частично-рекурсивными, и для них теорема о нормальной формуле принимает вид

$$\varphi(x_1,\ldots,x_p)\simeq U(\mu y T(e,x_1,\ldots,x_p,y)),$$

где "$\simeq$" означает, что два выражения либо одновременно определены и имеют то же значение, либо оба не определены. Это обобщение (слово обобщение здесь не совсем уместно, поскольку я перехожу от общерекурсивных к частично-рекурсивным функциям) понятия общей рекурсивности определенно избегалось

Черчем, 1936, Тьюрингом, 1936-37, 1937 (см. Клини, 1979, сноска 1).

Занимаясь приложениями рекурсивных функций, в статье Клини, 1938, я вернулся к теореме о рекурсии. Поскольку я уже ее доказывал в λ-исчислении, я теперь нашел ее доказательство длиной всего в одну строчку в своей теории частично-рекурсивных функций. В статье Клини, 1938, сноска 7, и в книге Клини, 1952, с. 340 я ввел обозначение "$\{e\}(x_1,\ldots,x_p)$" для правой части вышеупомянутой нормальной формы, рассматривая ее как частично-рекурсивную функцию от $e, x_1,\ldots,x_p$. При использовании этого обозначения формулировка теоремы о рекурсии оказывается вполне аналогичной соответствующей формулировке для λ-исчисления: для всякого натурального числа g и целого положительного p существует натуральное число f, такое, что для любых $x_1,\ldots,x_p$

$$\{f\}(x_1,\ldots,x_p) \simeq \{g\}(f, x_1,\ldots,x_p).$$

Это оказалось возможным, потому что в теории рекурсивных функций любое натуральное число, например, g или f, представляет некоторую частично-рекурсивную функцию. Как и для G в λ-исчислении, g в правой части, возможно, зависит от самого f, а не только от того, какую частичную функцию это f рекурсивно определяет. Это бывает полезно в приложениях.

Последнее из трех первоначальных эквивалентных определений эффективной вычислимости есть вычислимость на машине Тьюринга. Я предполагаю, что читатель знаком с этим понятием (Тьюринг, 1936-37).

Тьюринг ознакомился с проводимыми в Принстоне исследованиями по λ-вычислимости и общей рекурсивности, когда он уже почти закончил свою работу, к которой он добавил приложение, содержащее набросок доказательства эквивалентности его понятия вычислимости и λ-определимости. В 1937 г. он дал подробное доказательство эквивалентности. Короткая заметка Поста, 1936, содержащая те же идеи, что и статья Тьюринга, была независима от Тьюринга, но не от принстонских исследований.

Тьюринг, 1936-37, имел дело с машинами, осуществлявшими бесконечно длящийся вычислительный процесс, а именно: процесс вычисления бесконечной последовательности нулей и единиц, напечатанных в ячейках машинной ленты, расположенных через одну (будучи напечатанными они не стираются и не изменяются), в то время как вспомогательная работа, где уже возможны изменения записи, занимает промежуточные ячейки. Вычислимым вещественным числом (в промежутке между 0 и 1) называется такое число, двоичное разложение которого может быть вычислено указанным образом.

Затем Тьюринг определил вычислимую одноместную функцию φ как такую функцию, для которой существует машина, вычисляющая последовательность нулей и единиц, содержащую $\varphi(0)$ единиц перед первым нулем, и для $x>0$ $\varphi(x)$ единиц между x-ми $(x+1)$-м нулями. Он отмечает, что аналогичное определение можно дать для вычислимых функций нескольких переменных.

Отдавая должное тьюринговскому определению машины, я скептически отнесся к тому способу, которым он ее использовал для вычисления числовых функций. Ясно, во всяком случае, что таким способом могут быть вычислены только всюду определенные функции $\varphi(x)$. В своих лекциях, прочитанных весной 1941 г. в Мэдисоне (штат Висконсин) и книге Клини, 1952, гл. XIII, я применил его машины по-другому, в духе статьи Поста, 1936.

Прежде всего, я принял соглашение, что произвольное натуральное число n должно быть представлено при вычислениях посредством блока $n+1$ палочек, напечатанных в последовательных ячейках машинной ленты, за которыми следует пустая ячейка. Набор из p натуральных чисел $x_1,\ldots x_p$ представляется посредством p-блоков из $x_1+1,\ldots,x_p+1$ палочек, причем перед первым блоком, между каждыми двумя и после последнего блока находятся пустые ячейки.

Частичную функцию $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$ я назвал вычислимой по Тьюрингу, если некоторая машина Тьюринга, получив набор натуральных чисел, выдает значение $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$, если оно определено, а в противном случае не выдает никакого результата. Вводимый в машину набор $x_1,\ldots,x_p$ должен быть представлен на ее ленте, как было описано выше, причем остальные ячейки ленты предполагаются пустыми, и машина обозревает последнюю ячейку в указанном представлении, находясь при этом в первом активном состоянии (лента предполагается бесконечной вправо). Машинные состояния - это то, что Тьюринг называл m-конфигурациями; я предполагаю, что данная машина имеет конечное число активных состояний, в которых машина выполняет некий вычислительный акт, или, в терминах Тьюринга,- "move" , а также одно пассивное состояние. Машина, получившая в указанном смысле входные данные, выдает ответ $\varphi(x_1,\ldots,x_p)=m$, коль скоро в некоторый момент она достигает пассивного состояния, причем на ленте записан набор $x_1,\ldots,x_p,m$ и обозревается последняя палочка этого набора. Ввиду детерминированности последовательности машинных актов для заданных $x_1,\ldots,x_p$ может существовать не более одного такого m .

Приведенные в статье Тьюринга, 1937, доказательства эквивалентности его понятия вычислимости с понятием λ-определимости и рекурсивности вместе с моими доказательствами из Клини, 1952, гл. XII, устанавливают эквивалентность приведенной версии тьюринговой исчислимости с первоначальным определением самого Тьюринга, 1936-37, коль скоро φ всюду определена, в противном случае его версия неприменима. Для тех, кто хотел бы работать с первоначальным тьюринговым определением, полезные критические замечания имеются в приложении к статье Поста, 1947.

Что касается совпадения с эффективной вычислимостью, тьюринговская вычислимость является наиболее правдоподобной, я бы даже сказал, неотразимо убедительной, поскольку она, как это непосредственно ясно, направлена прямо к искомой цели (как это скромно предположил сам Тьюринг, 1947, с. 153).

По-видимому, лишь после появления формулировки Тьюринга, Гедель принял тезис Черча, который с тех пор стал называться тезисом Черча-Тьюринга. В примечании к перепечатке в книге Девиса, 1965, своей статьи 1934 г. Гедель писал: "Работа Тьюринга дает анализ понятия механической процедуры, иначе говоря, алгоритма или вычислительной процедуры, или конечной комбинаторной процедуры. Убедительно показывается, что это понятие эквивалентно машине Тьюринга...". В личной беседе, в октябре 1979 г. в Сан-Хуане, Девис высказал уверенность, что эквивалентность геделевского и моего определений общей рекурсивности (которую Гедель в письме к Девису от 15 февраля 1965 г. назвал не совсем тривиальной), а также моя теорема о нормальной форме вместе с доводами Тьюринга убедили Геделя в справедливости тезиса Черча-Тьюринга.

Поскольку тьюринговское определение непосредственно связано с машинами, хотя бы и идеализированными (безошибочные с бесконечной памятью), я думаю, что оно должно было иметь непосредственное практическое значение, хотя я никогда не был связан с этими вопросами. Сам Тьюринг занимался такими вещами в Национальной физической лаборатории в 1945-48 гг., а с 1948 г. - в Лаборатории вычислительных машин в Манчестере, Англия.

Более раннее понятие λ-определимости (как я уже отметил) примечательно той особенностью, что его формулировка возникла в связи с некоторыми очень простыми и само собой напрашивающимися обстоятельствами, в которых не было возможности предвидеть будущий результат. Любая данная λ-формула порождает вычислительный процесс для вычисления определяемой ею функции; конечно, эта λ-формула может быть сложной. Эрбран-гёделевская общая рекурсивность и моя частичная рекурсивность, из нее возникшая, работают с системами равенств, которые тоже могут быть весьма необозримыми. При тьюринговском определении вычислимости таблицы, описывающие работу машины Тьюринга, тоже могут быть весьма сложными. Мало того, в своей статье (Тьюринг, 1937, с. 153) автор говорит о λ-определимости, как о более удобном понятии. (Как я сам думаю, удобство для той или иной цели должно проверяться на практике.)

Сам я, быть может, под непосредственным влиянием холодного приема, который встретило понятие λ-определимости в математических кругах в 1933-35 гг., предпочел после того, как была определена общая рекурсивность, работать в ее терминах. (Позднее я, однако, опубликовал одну статью (Клини, 1962) по λ-определимости в теории высшей рекурсии.) Я полагал, что общая рекурсивность более тесно связана с традиционной математикой. Она оформляется в привычном для математиков языке и хорошо согласуется с теорией специальной рекурсивности, восходящей к формулировкам Дедекинда и Пеано и находящейся в главном русле математики.

Я не могу пожаловаться на прием, оказанный моим работам после 1935 г., хотя не вполне уверен - была ли моя переориентация действительным усовершенствованием. Задним числом я чувствую, что не проявил достаточной активности в защиту λ-определимости. Поэтому я очень рад, что интерес к λ-определимости возродился после работ Скотта, 1963 г.

Моя теорема о нормальной форме дает возможность, при работе с общерекурсивными и частично-рекурсивными функциями, избежать неудобств, связанных с рассмотрением сложных систем управлений. Она допускает формулировку μ-рекурсивности (Клини, 1952, с. 320), в которой большая часть теории находит удобное выражение, не зависящее от ее первоначальной формулировки.

Впоследствии были опубликованы другие эквиваленты этих трех понятий, возникших в середине тридцатых годов. Их сторонники утверждают, что эти эквиваленты имеют существенные достоинства (поскольку я с ними не работал, я не могу оценить их достоинства). Я упомяну определение Поста, использующее его канонические системы (Пост, 1943), нормальные алгоритмы (Марков, 1951, 1954) (родственные постовским, но соответствующие частичной, а не общей рекурсивности) и формулировку Смальяна, использующую его элементарные формальные системы (Смальян, 1961) (также родственную Посту, 1943).

Мой обзор до сих пор был связан с основными объектами теории рекурсивных функций на целых положительных или натуральных числах. В связи с теорией этих функций были получены многочисленные последующие результаты.

Когда возникло понятие общерекурсивной функции, ранее существовавшие понятия специальной рекурсивности (см. Петер, 1936) образовали субрекурсивную иерархию; с тех пор были исследованы другие пути построения субрекурсивных иерархий. Я лишь немного сталкивался с этой областью (см. Клини, 1958, и Акст, 1959, 1963) и не считаю себя подготовленным для обзора этих вещей.

Первые результаты по неразрешимости были получены Черчем, 1936, 1936-а; Клини, 1936, 1943 и Тьюрингом, 1936-37. Дальнейшие исследования, начиная с работ Поста, 1947, и Маркова, 1947, показали неразрешимость различных математических проблем, не связанных непосредственно с логикой (как это предвидел Черч в открытке от 19 мая 1936 г.), а именно в алгебре, топологии и вещественном анализе. Соответствующие ссылки можно найти в книге Клини, 1967, с. 264, и статье Буна, 1968.

Интуиционистская школа математики, основанная Брауэром, I908, I918-I9 и др., принимала только такие математические доказательства, которые являлись конструктивными. Весной I94I г. я предположил, что это должно означать, что интуиционистское доказательство утверждения вида "для всякого x существует такое y, что $R(x,y)$" неявно определяет общерекурсивную функцию φ, такую, что для всех x выполняется $R(x,\varphi(x))$. Я подтвердил это предположение в статье Клини, I945, а затем Нельсон, I947, получил соответствующий результат (изложение этого см. в Клини, I952, § 82). Аналогичные результаты были получены для интуиционистского анализа (Клини и Весли, I965). Обзор можно найти в Клини, I973.

В работах Черча и Клини, I936; Черча, I938; Клини, I938, понятие λ-определимости и рекурсивности были применены для характеризации эффективности бесконечных ординалов. Так возникла теория конструктивных ординалов, получившая дальнейшее развитие в статьях Клини, I955-а, I944, и Спектора, I955.

Рекурсивность, релятивизованная к некоторому классу числовых задач или, как я бы выразился, к тотальному числовому предикату, или к числовому множеству, или, наконец, к тотальной числовой функции, была введена Тьюрингом в его принстонской статье (Тьюринг, I939) в терминах предложенного им понятия оракула. Например, если ϕ - тотальная функция, то функция φ является общерекурсивной или частино-рекурсивной относительно ϕ, если φ вычислима на некоторой машине, подобной обычной машине Тьюринга (Тьюринг, I936-37), с тем лишь отличием, что она может обращаться к оракулу, который на любой вопрос: "Каково значение $\phi(x)$ для x, полученного по ходу вычисления?" - всегда дает правильный ответ. Следуя Геделю, I934, будем представлять предикат $P(x)$ посредством функции $\varphi(x)$, где $\varphi(x)=0$, если $P(x)$ - истинно, и $\varphi(x)=1$, если $P(x)$ - ложно; тогда мы будем говорить, что P рекурсивно, если рекурсивно φ. Аналогично, представляя $Q(x)$ посредством $\phi(x)$, будем говорить, что P рекурсивно относительно Q, если φ рекурсивно относительно ϕ.

Пост, I948, определил степени неразрешимости для предикатов, множеств и функций. Термин "неразрешимость" подсказывает, что он имел дело с предикатами и т.п., для которых не существует решения проблемы разрешимости, т.е. алгоритма для выяснения того, будет ли предикат истинным для данных аргументов или принадлежит ли данное число к рассматриваемому множеству; для функции лучше говорить о проблеме вычислимости, т.е. о существовании алгоритма вычисления этой функции. Предикат P имеет ту же самую степень, что и Q , если P рекурсивен (по Тьюрингу) относительно Q, и наоборот; P имеет меньшую степень, чем Q , если P рекурсивно относительно Q , но не наоборот. Степенью называется множество всех предикатов (множеств, функций), имеющих одну и ту же степень. Наименьшая степень неразрешимости называется разрешимой степенью, она состоит из общерекурсивных предикатов, множеств и функций. Работой Клини, 1944, я присоединился к Посту в изучении структуры его степеней. Из этого возникла обширная область исследований (см. Сакс, 1963; Шенфилд, 1971).

Пост, 1944, работал с рекурсивно перечислимыми множествами, включив в этот класс, наряду с множествами, которые перечисляются общерекурсивными функциями (Клини, 1936), также пустое множество. Он отождествил рекурсивно перечислимые множества с такими множествами S , для которых предикат $a \in S$ выразим в форме $(Ex)R(a,x)$, где R рекурсивен, о чем будет сказано ниже. Он поставил тогда же проблему, которую после его статьи (Пост, 1948) можно сформулировать так: "Имеют ли все рекурсивно перечислимые, но нерекурсивные множества одну и ту же степень неразрешимости?" Положительный ответ означал бы, что все доказательства неразрешимости проблем разрешения для формальных систем или для рекурсивно перечислимых множеств можно, в принципе, получать путем сведения рассматриваемой проблемы разрешения к конкретной неразрешимой проблеме такого рода. Проблема Поста, как ее стали называть, ожидала своего решения до 1956 г. Фридберг, 1956, 1958, в то время 20-летний студент Гарварда, и Мучник в России, 1956, 1958, примерно в том же возрасте, независимо доказали, что существует пара рекурсивно-перечислимых множеств с несравнимыми степенями, так что проблема Поста была решена отрицательно.

В работе Клини, 1943, я ввел иерархию предикатов, названную впоследствии "арифметической иерархией", которая получается, если, начиная с рекурсивных предикатов, навешивать все большее число кванторов: "для всех x ", или "(x)"и "существует x ", или "(Ex)" . Это дает классификацию предикатов, используемых в элементарной теории чисел (арифметике). А именно, рассмотрим предикаты следующих видов

$$\begin{array}{ll} & (Ex)R(a,x) \quad (x)(Ey)R(a,x,y)\ldots \\ R(a) & \\ & (x)R(a,x) \quad (Ex)(y)R(a,x,y)\ldots \end{array}$$

где R везде означает общерекурсивный предикат (эквивалентным образом во всех случаях, кроме первого, можно брать примитивно-рекурсивные предикаты). Для каждой из этих форм, кроме первой, существует предикат от переменной a , выразимый в этой форме, но не выразимый в другой форме с тем же числом кванторов, а также ни в какой форме с меньшим числом кванторов. Эти результаты, полученные в 1940 г., положили начало использованию теории рекурсивных функций для изучения таких областей математики, где эффективность не имеет места. По мере продвижения в арифметической иерархии, мы получаем предикаты все большей степени неразрешимости в смысле Поста, 1948. Согласно результатам Клини и Поста, 1954, постовские степени образуют тонкую структуру внутри каждого уровня арифметической иерархии, кроме первого. Мостовский, 1947, независимо получил арифметическую иерархию несколько в другой форме, представив ее как аналог проективной иерархии в дескриптовой теории. Эддисон, 1954, 1955, 1958, 1960, исследовал эту и другие аналогии.

Рассматривая тьюрингово вычисление на машине с оракулом, в которой правила, управляющие поведением машины (включая способ обращения к оракулу и работу машины после получения ответа), являются фиксированными, но при этом сам оракул меняется от одного вычисления к другому, так что он дает ответы о значениях одноместной функциональной переменной α ; я получил в 1950 г. понятие общерекурсивной функции, зависящее от функциональной переменной, короче говоря, $\varphi(a)$ можно рассматривать как рекурсивную функцию $\varphi(a,\alpha)$ от двух переменных, если $\varphi(a)$ рекурсивна относительно α равномерно по α (в терминах машины Тьюринга с оракулом). Мы можем здесь опустить числовую переменную, или, в общем случае, можем иметь любое количество переменных, как числовых, так и функциональных.

(Я использовал это в своих исследованиях по интуиционизму.)

В работе Клини, 1955, я применял это понятие для построения иерархии числовых предикатов от переменной a путем навешивания кванторов по функциональным переменным на арифметические предикаты; так возникла "аналитическая иерархия". Арифметическая иерархия образует минимальный уровень аналитической иерархии точно так же, как общерекурсивные предикаты образуют минимальный уровень арифметической иерархии. Арифметическую иерархию можно продолжить по-другому: более плавно, до трансфинитных уровней, занумерованных конструктивными ординалами первого и второго классов; по существу, мы используем трансфинитные последовательности числовых кванторов. Это дает гиперарифметическую иерархию. В работе Клини, 1955-b, я показал, что предикаты, попадающие в эту иерархию, - это в точности те, которые выразимы в обеих однокванторных формах аналитической иерархии - это является аналогом результатов Клини, 1943, Поста, 1944, и Мостовского, 1947, о том, что предикат общерекурсивен, когда он выразим в обеих однокванторных формах арифметической иерархии.

Эддисон был инициатором обсуждений в Мэдисоне и в Варшаве, в ходе которых были введены обозначения Σ^j_k, Π^j_k, ставшие стандартными в теории иерархий (Эддисон, 1958, и Мостовский, 1959). Здесь Σ^0_k - класс множеств S, для которых предикат "a принадлежит S" выразим в k-кванторной форме арифметической (гиперарифметической) иерархии, начинающейся с квантора существования (или класс предикатов, представленных в этом виде); Π^0_k определяется аналогично, когда первый квантор есть квантор общности. Σ^1_k, Π^1_k таким же образом связаны с аналитической иерархией; для $j>1$ обозначение Σ^j_k, Π^j_k относится к иерархиям, использующим кванторы более высоких конечных типов, которые я ввел в работах Клини, 1955, с. 312 и 1955-b, с. 212, и изучал в работах Клини, 1959 и 1963. Обозначение $\Delta^j_k = \Sigma^j_k \cap \Pi^j_k$ вошло в употребление в 60-е годы. В этих обозначениях две вышеупомянутые теоремы можно записать так: гиперарифметичность $= \Delta^1_1$; общая рекурсивность $= \Delta^1_0$.

Впоследствии получила развитие теория рекурсивных функций от переменных любых типов $0,1,2\ldots$. Объектами типа 0 являются натуральные числа, а тип $j+1$ имеют одноместные функции из типа j в тип 0. Эта теория открывается работами Клини, 1959 и 1963 (см. обзор Кечриса и Московакиса, 1977). Объектом изучения в общем виде стали также индуктивные определения, многочисленные примеры которых встречались в предыдущих работах (см., например, Спектор, 1961, и Московакис, 1974).

При моем приглашении выступить на этом собрании был проявлен интерес к работе Клини, 1956, вышедшей под названием "Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах" (выполненной в основном в 1951 г.). По поводу ее возникновения я могу лишь сказать, что мне посчастливилось заняться тематикой, содержащей в себе существенные и тогда еще не выявленные возможности, как это было в 1931-1932 гг., когда я изучал формализм Черча, который, хотя и включал в себя λ-исчисление более или менее явно, но все то, что из этого вышло, конечно, нельзя было предвидеть.

Летом 1952 года, пребывая в Санта-Монике в качестве гостя корпорации РЭНД (приглашение было получено через моего старого принстонского товарища Мэррила Флоуда), я получил для ознакомления статью Мак-Каллока и Питтса, 1943, содержащую математическую модель нервных сетей, чтобы посмотреть, что можно из этого сделать. Я нашел, что их модель очень интересна и оригинальна, но исследование было беглым, и они не использовали заложенных в этом подходе возможностей; таким образом, я сделал то, что само собой напрашивалось, как мне казалось, имея при этом в виду также понятие конечного автомата, извлеченное мною при чтении корректуры лекции фон Неймана, 1951, на симпозиуме в Хиксоне. Моя работа в этой области была выполнена за несколько месяцев в 1951 г. в Санта-Монике и по возвращении в Мэдисон, и еще немного в 1955 г., когда я редактировал выпускаемый корпорацией РЭНД сборник "Автоматы". Эта работа проходила одновременно с выполнением срочной программы исследований по теории рекурсивных функций (в широком смысле слова). Мною тогда были начаты многие работы, не доведенные к тому времени до конца, поэтому я был вынужден основное время потратить на завершение того, на что уже было затрачено много усилий. Я сожалею об этом, поскольку я видел много заманчивых проблем, возникающих в теории автоматов, с которой я тогда столкнулся.

На этом я заканчиваю свое свидетельство.

Признательность

Выполнение этой работы частично поддерживалось Национальным научным фондом по субсидии № МС 79-01439.

Литература

Аккерман/Ackermann, Wilhelm

1928. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Mathematische Annalen 99, 118-133.
Англ.пер.: Ван Хейенорт, 1967, с. 493-507.

Акст/Axt, Paul

1959. On a subrecursive hierarchy and primitive recursive degrees. Trans. Amer. Math. Soc. 92, 85-105.

1963. Enumeration and the Grzegorczyk hierarchy. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 9, 53-65.

Брауэр/Brouwer, L.E.J.

1908. De onbetrouwbaarheid der logische principes (The untrustworthiness of the principles of logic). Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2, 152-158.

1918-19. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste sectie) 12, 5 (1918), 43 pp.; 7 (1919) 33 pp.

Бун/Boone, William W.

1968. Decision problems about algebraic and logical systems as a whole and recursively enumerable degrees of unsolvability. Contributions to Mathematical Logic. K. Schütte, ed. Amsterdam, North-Holland, pp. 13-33, 72-74.

Ван Хейенорт/van Heijenoort, Jean

1967. From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge, Harvard University Press, xi+660 pp.

Гедель/Gödel, Kurt

1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 173-198.
Англ.пер.: Девис, 1965, с.4-38 и Ван Хейенорт, 1967, с. 592-616.

1931-32a. Remarks in Diskussion zur Grundlegung der Mathematik. Erkenntnis 2, 147-148.

1934. On undecidable propositions of formal mathematical systems. Mimeographed notes by S.C.Kleene and J.B.Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, 1934, 30 pp.
Перепечатаны: Девис, 1965, с.39-74.

1938. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. 24, 556-557.

1939. Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. 25, 220-224.

1940. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Notes by George W.Brown on lectures at the Institute for Advanced Study, 1938-39. Annals of Mathematics Studies 3, Princeton, Princeton University Press, 66 pp.
Русск.пер.: Гедель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. УМН, 3, № I (1948), с. 96-149.

Гильберт/ Hilbert, David

1926. Über das Unendliche. Mathematische Annalen 95, 161-190.
Англ.пер.: Ван Хейенорт, 1967, с. 367-392; русск.пер.: Гильберт Д. Основания геометрии, М.-Л.: Гостехиздат, 1948, с. 338-364.

Дэвис/ Davis, Martin

1965. The Undecidable Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions. Hewlett, N.Y., Raven Press, 440 pp.

Дедекинд/ Dedekind, Richard

1888. Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig (English trans. in Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, Chicago, Open Court, 1901, 29-115).

Закс/ Sacks, Gerald E.

1963. Degrees of unsolvability. Annals of Mathematics Studies 55, ix+174 pp.

Карри/ Curry, Haskell B.

1929. An analysis of logical substitution. Amer. J. Math. 51, 363-384.

1930. Grundlagen der kombinatorischen Logik. Amer. J. Math. 52, 509-536, 789-834.

1932. Some additions to the theory of combinators. Amer. J. Math. 54, 551-558.

Кечрис и Московакис/ Kechris, Alexander S., and Yiannis N. Moschovakis

1977. Recursion in higher types. Handbook of Mathematical Logic. Jon Barwise, ed. Amsterdam, North-Holland, pp. 681-737.

Клини/ Kleene, Stephen C.

1934. Proof by cases in formal logic. Annals of Math., 2s. 35, 529-544.

1935. A theory of positive integers in formal logic. Amer. J. Math. 57, 153-173, 219-244.

1936. General recursive functions of natural numbers. Mathematische Annalen 112, 727-742.

1936a. λ-definability and recursiveness. Duke Math. J. 2, 340-353.

1938. On notation for ordinal numbers. J. Symbolic Logic 3, 150-155.

1943. Recursive predicates and quantifiers. Trans. Amer. Math. Soc. 53, 41-73.

1944. On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals. Amer. J. Math. 66, 41-58.

1945. On the interpretation of intuitionistic number theory. J. Symbolic Logic 10, 109-124.

1950. Recursive functions and intuitionistic mathematics. Proc. Int. Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. Providence, Amer. Math. Soc., 1952, I, 679-685.

1952. Introduction to Metamathematics. Amsterdam, North-Holland, xi+550 pp.
Русск. пер.: Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

1955. Arithmetical predicates and function quantifiers. Trans. Amer. Math. Soc. 79, 312-340.

1955a. On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals (second paper). Amer. J. Math. 77, 405-428.

1955b. Hierarchies of number-theoretic predicates. Bul. Amer. Math. Soc. 61, 193-213.

1956. Representation of events in nerve nets and finite automata. Automata Studies. C.E.Shannon and J.McCarthy, eds. Annals of Mathematics Studies 34, 3-41 (slightly altered from Project RAND Research Memorandum RM-704, 15 December 1951, 101 pp.).
Русск. пер.: Клини С.К. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. В сб. "Автоматы", М.: ИЛ, 1956, с. 15-67.

1958. Extension of an effectively generated class of functions by enumeration. Colloquium Mathematicum 6, 67-78.

1959. Recursive functionals and quantifiers of finite types I. Trans. Amer. Math. Soc. 91, 1-52.

1962. Lambda-definable functionals of finite types. Fundamenta Mathematicae 50, 281-303.

1963. Recursive functionals and quantifiers of finite types II. Trans. Amer. Math. Soc. 108, 106-142.

1967. Mathematical Logic. New York, John Wiley & Sons,

xiii+398 pp.
Русск. пер.: Математическая логика. М.: Мир, 1973.

1973. Realizability: a retrospective survey. Cambridge Summer School in Mathematical Logic, 1971. A.R.D.Mathias and H.Rogers, eds. Lecture Notes in Mathematics 337, Berlin, Springer-Verlag, 95-112.

1976. The work of Kurt Gödel. J. Symbolic Logic 41, 761-778. An addendum, 43 (1978), 613.

1978. Recursive functionals and quantifiers of finite types revisited I. Generalized recursion theory II, Proc. 1977 Oslo Symposium. J.E.Fenstad, R.O.Gandy and G.Sacks, eds. Amsterdam, North-Holland, 185-222.

Клини и Пост/Kleene, S.C., and Emil L.Post

1954. The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability. Annals of Math., 2s 59, 379-407.

Клини и Россер/Kleene, S.C., and J.B.Rosser

1935. The inconsistency of certain formal logics. Annals of Math., 2s 36, 630-636.

Клини и Весли/Kleene, S.C., Vesley R.E.

1965. The Foundations of Intuitionstic Mathematics. Amsterdam, North-Holland, viii+206 pp.
Русск. пер.: Клини С.К., Весли Р.Е. Основания интуиционистской математики. М.: Мир, 1978.

Маккалок и Питс/ McCulloch, Warren S., and Walter Pitts

1943. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bul. Math. Biophysics 5, 115-133.
Русск. пер.: Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности. В сб. "Автоматы". М.: ИЛ, 1956, с. 362-384.

Марков А.А.

1947. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. ДАН СССР, 55, № 7, с. 587-590.

1951. Теория алгорифмов. Тр. МИАН СССР, т. 38, с.176-189.

1954. Теория алгорифмов. Тр. МИАН СССР, т. 42.

Московакис/Moschovakis, Yiannis N.

1974. Elementary Induction on Abstract structures. Amsterdam, North-Holland, 174 pp.

Мостовский/Mostowski, Andrzej

1947. On definable sets of positive integers. Fundamenta Mathematicae 34, 81-112.

1959. On various degrees of constructivism. Constructivity in Mathematics. Proc. of Colloquium, Amsterdam, 1957, A.Heyting, ed., Amsterdam, North-Holland, 178-194.

Мучник А.А.

1956. Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов. ДАН СССР, 108, с. 194-197.

1958. Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгоритмов. I. Тр. Моск. Матем. об-ва, т. 7, с. 391-405.

Нельсон/Nelson, David

1947. Recursive functions and intuitionistic number theory. Trans. Amer. Math. Soc. 61, 307-368.

Пеано/Peano, Giuseppe

1889. Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita. Turin, Bocca, xvi+20 pp. (English trans. in van Heijenoort, 1967, 83-97).

1891. Sul concetto di numero. Rivista di Matematica 1, 87-102, 256-267.

Петер/Peter, Rózsa

1932. Rekursive Funktionen. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 2, 336-337.

1934. Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. Mathematische Annalen 110, 612-632.

1935. Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. Mathematische Annalen 111, 42-60.

1936. Über die mehrfache Rekursion. Mathematische Annalen 113, 489-527.

1951. Rekursive Funktionen. Budapest, Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag), 206 pp. Recursive Functions, Third revised edition, New York, Academic Press, 1967, 300 pp.
Русск. пер. Петер Р. Рекурсивные функции. М.: ИЛ, 1954.

Пост/Post, Emil L.

1936. Finite combinatory processes - formulation 1. J. Symbolic Logic 1, 103-105.

1943. Formal reductions of the general combinatorial decision problem. Amer. J. Math. 65, 197-215.

1944. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bul. Amer. Math. Soc. 50, 284-316.

1947. Recursive unsolvability of a problem of Thue. J. Symbolic Logic 12, 1-11.

1948. Degrees of recursive unsolvability. Abstract (Preliminary report). Bul. Amer. Math. Soc. 54, 641-642.

Расселл/Russell, Bertrand

1919. Introduction to Mathematical Philosophy. London, Geo.Allen and Unwin; New York, Macmillan, viii+208 pp.

Россер/Rosser, J. Barkley

1935. A mathematical logic without variables. Annals of Math., 2s. 36, 127-150; Duke Math. J. 1, 328-355.

Сколем/Skolem, Thoralf

1923. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbare Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, J. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse 1923 6, 38 pp. (English trans. in van Heijenoort, 1967, 302-333).

Смальян/Smullyan, Raymond M.

1961. Theory of formal systems. Annals of Mathematics Studies 47, xi+142 pp.
Русск. пер.: Смальян Р.М. Теория формальных систем. М.: Мир, I98I.

Черч/Church, Alonzo

1932. A set of postulates for the foundation of logic. Annals of Math., 2s. 33, 346-366.

1933. A set of postulates for the foundation of logic (second paper). Annals of Math., 2s. 34, 839-864.

1936. An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. 58, 345-363.

1936a. A note on the Entscheidungsproblem. J. Symbolic Logic 1, 40-41. Correction, 101-102.

1938. The constructive second number class. Bul. Amer. Math. Soc. 44, 224-232.

Черч и Клини/Chrch, Alonzo, and S.C.Kleene

1936. Formal definitions in the theory of ordinal numbers. Fundamenta Mathematicae 28, 11-21.

Черч и Россер/Church, Alonzo, and J.B.Rosser

1936. Some properties of conversion. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 472-482.

Шенфинкель/Schonfinkel, Moses

1924. Über die Bausteine der mathematischen Logik. Mathematische Annalen 92, 305-316.
Англ. пер.: Ван Хейенорт, I967, с. 355-366.

Шенфилд/Shoenfield, Joseph R.

1971. Degrees of Unsolvability. Amsterdam, North-Holland, viii+111 pp.

Русск. пер.: Шенфилд Дж. Степени неразрешимости. М.: Наука, 1977.

Эддисон/Addison, John W.

1954. On Some Points of the Theory of Recursive Functions. Ph.D. dissertation, University of Wisconsin.

1955. Analogies in the Borel, Luzin, and Kleene hierarchies, I and II. Abstracts, Bul. Amer. Math. Soc. 61, 75 and 171-172.

1958. Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. Fundamenta Mathematicae 46, 123-135.

1960. The theory of hierarchies. Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proc. of 1980 International Congress. E.Nagel, P.Suppes, and A.Tarski, eds. Stanford, Stanford University Press, 1962, pp. 26-37.
Русск. пер.: Аддисон Дж. Теория иерархий. В сб. Мат. логика и ее примен. М.: Мир, 1965, с. 23-36.

Спектор/Spector, Clifford

1955. Recursive well-orderings. J. Sym. Logic 20, 151-163.

1961. Inductively defined sets of natural numbers. Infinitistic methods. Proc. Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 1959, Oxford, Pergamon; Warsaw, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, pp. 97-102.

Тьюринг/Turing, Alan M.

1936-37. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc., 2s. 42, 230-265. A correction, 43 (1937), 544-546.

1937. Computability and λ-definability. J. Symbolic Logic 2, 153-163.

1939. Systems of logic based on ordinals. Proc. London Math. Soc., 2s. 45, 161-228.

Уайтхед/Whitehead, Alfred North

1911. An Introduction to Mathematics. London, Williams and Norgate; New York, Henry Holt, vi+256 pp.

фон Нейманн/von Neumann, John

1951. The general and logical theory of automata. Cerebral Mechanisms in Behavior: The Hixon Symposium, September 1948, Pasadena. L.A.Jeffress, ed. New York, John Wiley & Sons, pp. 1-31.
Русск. пер.: Фон Нейман Дж. Общая и логическая теория автоматов. Прил. к кн.: Тьюринг А. Может ли машина мыслить? М.: Физматгиз, с. 59-102.

Фридберг/Friedberg, Richard M.

1956. Article concerning him. Time 67, 12 (March 19, 1956), 83.

1957 (abstract 1956). Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (solution of Post's problem, 1944). Proc. Nat. Acad. Sci. 43, 236-238. Abstract, Bul. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 260.