

М. М. Бутовский

РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛОВ ПОПЕРЕЧНЫХ МЕР МИНКОВСКОГО,
СУММ МИНКОВСКОГО И ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ БЛЯШКЕ
ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ
В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ \mathbf{R}^3

ВВЕДЕНИЕ

Выпуклый анализ – раздел математики, в котором изучают выпуклые объекты: выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи. Таким образом, этот раздел имеет пересечения с геометрией (выпуклость – геометрическое понятие), анализом (функция – одно из основных понятий анализа) и теорией экстремальных задач.

В 1916 году Вильгельмом Бляшке было предложено отображение пространства трехмерных компактных выпуклых тел, снабженного метрикой Хаусдорфа, в компактную область на плоскости. Образ этого отображения на плоскости \mathbf{R}^2 известен теперь как диаграмма Бляшке. Часть границы этой диаграммы определяется из хорошо известных геометрических неравенств, но неравенства, которые замыкают границу, остаются неизвестными.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Отметим несколько основных понятий.

Множество \mathbf{R}^n является *аффинным пространством*, связанным с векторным пространством $\overline{\mathbf{R}^n}$. Это означает, что каждой паре точек $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ поставлен в соответствие вектор $\overline{xy} \in \overline{\mathbf{R}^n}$. При этом должны выполняться условия: 1) для всякой точки $x \in \mathbf{R}^n$ и всякого вектора $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ существует единственная точка $y \in \mathbf{R}^n$, такая, что $\overline{xy} = \vec{a}$; 2) $\overline{xy} + \overline{yz} = \overline{xz}$.

Аффинное пространство \mathbf{R}^n , для которого соответствующее векторное пространство \mathbf{R}^n наделено скалярным произведением, называется *евклидовым пространством*.

Пространственное точечное множество образует *выпуклое тело*, если оно:

- 1) ограничено;
- 2) замкнуто;
- 3) обладает свойством выпуклости, т.е. со всякой пересекающей его прямой имеет общим только один отрезок (он может, конечно, сводиться к единственной точке).

Последнее, важнейшее, требование можно заменить равносильным требованием, чтобы точечное множество вместе с любыми двумя точками содержало и весь соединяющий эти точки отрезок.

Точка выпуклого тела называется *внутренней*, если можно указать некоторый шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий данному телу.

Точки выпуклого тела, не являющиеся внутренними, называются *граничными* точками. Граница ∂K выпуклого тела называется *выпуклой поверхностью*.

Граничная точка называется *регулярной*, если через нее проходит только одна опорная гиперплоскость.

Все точки, расстояние которых от выпуклого тела K не больше, чем ρ , образуют снова выпуклое тело K_ρ – «параллельное тело» для тела K .

Пусть K – выпуклое множество, и O – фиксированная точка в \mathbf{R}^n ; рассмотрим все $(n-r)$ -плоскости $L_{n-r[O]}$, содержащие O . Пусть K'_{n-r} – ортогональная проекция K на $L_{n-r[O]}$, т.е. K'_{n-r} – это выпуклое множество, состоящее из точек пересечения $L_{n-r[O]}$ с r -плоскостями, перпендикулярными к $L_{n-r[O]}$ и пересекающими K .

Среднее значение объемов проекций $V(K'_{n-r})$ будет равно

$$E(V(K'_{n-r})) = \frac{I_r(K)}{m(G_{n-r,r})} = \frac{O_{r-1} \cdots O_1 O_0}{O_{n-1} \cdots O_{n-r}} I_r(K),$$

где $m(G_{n-r,r})$ – объем многообразия Грассмана $G_{n-r,r}$, O_i – площадь поверхности i -мерной единичной сферы и

$$I_r(K) = \int_{G_{n-r,r}} V(K'_{n-r}) dL_{n-r[O]} = \int_{G_{r,n-r}} V(K'_{n-r}) dL_{r[O]}.$$

Для полноты положим $I_0(K) = V(K) =$ объему K .

Вместо интегралов $I_r(K)$, которые связаны с математическим ожиданием объемов проекций $V(K'_{n-r})$, обычно вводят так называемые средне-поперечные меры, или интегралы поперечных мер, определенные Минковским:

$$V_{n-r}(K) = \frac{(n-r)O_{n-1}}{nO_{n-r-1}} E(V(K'_{n-r})) = \frac{(n-r)O_{r-1} \cdots O_0}{nO_{n-2} \cdots O_{n-r-1}} I_r(K).$$

Для полноты положим

$$V_n(K) = I_0(K) = V(K),$$

Для объема K_ρ имеет место выражение

$$V(K_\rho) = \sum_0^n \binom{n}{i} V_{n-i}(K) \rho^i,$$

которое справедливо для любого $\rho \geq 0$ и называется *формулой Штейнера* для параллельных выпуклых тел.

С интегралами поперечных мер связано множество известных геометрических неравенств. Наиболее известным их общих неравенств между смешанными объемами является неравенство Александрова–Фенхеля

$$V^2(K_1, K_2, \dots, K_n) \geq V(K_1, K_1, K_3, \dots, K_n) \cdot V(K_2, K_2, K_3, \dots, K_n),$$

где K_1, \dots, K_n – непустые выпуклые компакты в \mathbf{R}^n .

Суммой Минковского двух подмножеств A и B линейного пространства V называется множество C , состоящее из сумм всевозможных векторов из A и B :

$$C = \{c | c = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

2. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для построения диаграммы Бляшке линейной комбинации выпуклых многогранников необходимо реализовать ряд предварительных вычислений и преобразований:

- 1) построение выпуклой оболочки из конечного числа точек;
- 2) расчет интегрально-поперечных мер для построенной оболочки;
- 3) расчет расстояния от точки до выпуклого многогранника;
- 4) нахождение объема параллельного тела;
- 5) построение заданных сумм Минковского;
- 6) заполнение диаграммы Бляшке.

Для построения выпуклой оболочки из конечного числа точек было разработано огромное количество алгоритмов. Один из них – *алгоритм QuickHull*, разработанный в 1996 году.

QuickHull – это довольно простой рекурсивный алгоритм. главное его преимущество состоит в том, что на случайном наборе точек он работает

гораздо быстрее других известных алгоритмов (алгоритм Грэхема, алгоритм Мельмана, алгоритм «Разделяй-и-Властвуй», алгоритм «заворачивания подарка» и др.). Алгоритм работает с пространствами любой размерности.

Для расчета интегралов поперечных мер Минковского необходимо искать решение системы линейных уравнений. Для данной задачи также разработано множество алгоритмов. Один из наиболее простых в исполнении – *метод Гаусса*. Он состоит в исключении слагаемых системы путем ее равносильного преобразования.

Для расчета расстояния от точки до многогранника был использован *алгоритм Lin-Canny*. Данный алгоритм был предложен Ming C. Lin и John F. Canny в 1991 г. Для данного алгоритма каждый многогранник представлен в виде набора фрагментов – вершин, линий и фейсов. Также для каждого фрагмента известны соседние фрагменты и определена область Вороного.

Область Вороного – это множество точек, расположенных ближе к данному, чем к какому-либо другому фрагменту многогранника. Область Вороного формирует область пространства снаружи многогранника, «прилежащую» к ближайшему фрагменту и также является выпуклым многогранником, хотя и незамкнутым. Набор областей Вороного для всех фрагментов многогранника называется *диаграммой Вороного*.

В качестве структур данных для областей Вороного используются ячейки, в которых хранятся плоскости, ограничивающие область Вороного с ссылками на соседние ячейки (с которыми граничат плоскости). Чтобы найти фрагмент многогранника, ближайший к определенной точке, нужно найти область Вороного, которой принадлежит эта точка. Иначе говоря, если точка P лежит внутри области Вороного f_B объекта B , то f_B является ближайшим фрагментом к точке P .

Рассмотрим проверку попадания точки в область Вороного фрагмента многогранника. Существуют три основных комбинации – точка-вершина, точка-линия и точка-фейс.

1. Точка-Вершина.

Если вершина V многогранника B является ближайшим фрагментом к точке P , то точка P должна лежать внутри области Вороного вершины V , ограниченной плоскостями, перпендикулярными линиям, касающимся V .

Если же точка находится вне области Вороного и лежит с другой стороны одной из ограничивающих плоскостей, то это означает, что по крайней мере одна из соседних линий ближе к точке P , чем вершина V . В этом слу-

чае алгоритм возьмет соответствующую линию и проверит, является ли она ближайшей к точке P .

2. Точка-Линия.

Если линия E многогранника B является ближайшим фрагментом к точке P , то точка P должна лежать внутри области Вороного линии E , ограниченной четырьмя плоскостями, две из которых перпендикулярны линии E и проходит через ее концы, и две содержат линию E и параллельны нормальям прилегающих к ней фейсов.

Если точка находится вне области Вороного и лежит с другой стороны одной из ограничивающих плоскостей, проходящих через концы линии (это означает, что одна из соседних вершин ближе к точке P , чем линия E) или одной из ограничивающих плоскостей, параллельных нормальям прилегающих фейсов (это означает, что один из соседних фейсов ближе к точке P , чем линия E), то алгоритм возьмет соответствующую вершину или фейс и проверит, является ли этот фрагмент ближайшим к точке P .

3. Точка-Фейс.

Если фейс F многогранника B является ближайшим фрагментом к точке P , то точка P должна лежать внутри области Вороного фейса F , ограниченной плоскостями, перпендикулярными фейсу и проходящими через ограничивающие фейс линии.

Если точка находится вне области Вороного и лежит с другой стороны одной из ограничивающих плоскостей, это означает, что одна из соседних линий ближе к точке P , чем фейс F , и алгоритм возьмет соответствующую линию и проверит, является ли она ближайшей к точке P .

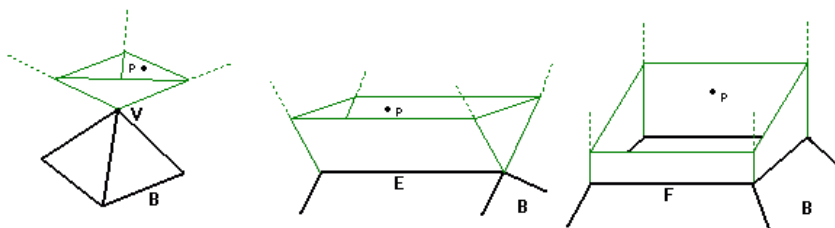


Рис. 1. Примеры попадания точки в области Вороного многогранника

Далее необходимо проверить, чтобы точка лежала над плоскостью, проходящей через фейс F , т.к. в противном случае точка может находиться внутри многогранника. В этом случае расстояние от точки до многогранника принимается равным нулю.

Для нахождения объема параллельного тела целесообразно использовать широко известный *метод Монте-Карло*.

Параллельное тело A целиком помещается в некоторый параллелепипед B с известным объемом. Затем параллелепипед B случайно заполняется большим количеством точек. Проверяем, какие из этих точек принадлежат A . Объем параллельного тела находится по формуле:

$$V(A) = \frac{N'}{N} V(B),$$

где N' – количество точек, попавших в A ;

N – общее количество точек.

3. ДИАГРАММА БЛЯШКЕ

Как упоминалось ранее, объем параллельного тела A_ε для многогранника A выражается формулой Штейнера

$$V(A_\varepsilon) = \sum_0^n \binom{n}{i} V_{n-i}(A) \varepsilon^i.$$

Коэффициенты V_{n-i} , называемые интегралами поперечных мер Минковского, имеют определенный геометрический смысл. Так, для любой размерности пространства V_n есть объем выпуклого тела A , V_0 – коэффициент в формуле объема n -мерного шара (π при $n = 2$, $\frac{4}{3}\pi$ при $n = 3$ и т.д.). Следу-

ет заметить, что $\binom{n}{i}$ – коэффициенты бинома Ньютона, т.е.

$$\binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Следовательно, в случае \mathbf{R}^2 справедливо $V_2 = \frac{1}{2}S$, а в случае \mathbf{R}^3 имеют место равенства $V_2 = \frac{1}{3}S$ и $V_1 = \frac{1}{3}M$, где S – площадь поверхности, а M – интеграл средней кривизны.

Варьируя значения ε , мы получим различные значения объемов $V(A_\varepsilon)$. Таким образом можно записать систему из n линейных уравнений с n неиз-

вестными $(V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$ и получить численные значения интегральных поперечных мер. Стоит заметить, что эти значения неотрицательны. Это следует из определения интегрально-поперечных мер и сопутствующих ему рассуждений.

Существует ряд геометрических неравенств, описывающих интегральные поперечные меры. Это широко известные неравенства Минковского, Александра–Фенхеля, изопериметрические неравенства и многие их следствия.

В 1916 году Вильгельмом Бляшке было предложено отображение пространства компактных выпуклых тел, принадлежащих 3-мерному евклидову пространству \mathbf{R}^3 , в компактную область на плоскости. Образ этого пространства на плоскости \mathbf{R}^2 известен теперь как диаграмма Бляшке. Часть границы этой диаграммы определяется из хорошо известных геометрических неравенств, но неравенства, которые замыкают границу, остаются неизвестными. Существует предположение Бьери об экстремальных телах, соответствующих неизвестной части границы. Эту гипотезу не удается доказать или опровергнуть уже более пятидесяти лет, хотя образы предложенных тел на диаграмме могут быть найдены с использованием компьютера. Также является неизвестным геометрическое неравенство, которому удовлетворяют эти выпуклые тела.

Пусть κ – пространство компактных выпуклых тел, принадлежащих 3-мерному пространству. K – некоторое выпуклое тело, принадлежащее κ , тогда обозначим через $V(K) = V$, $S(K) = S$, $M(K) = M$ – объем, площадь поверхности и интеграл средней кривизны K соответственно. Интеграл средней кривизны для гладкого тела может быть найден по формуле $\int \frac{1}{2}(k_1 + k_2)dS$, где k_1 и k_2 есть главные кривизны границы тела K .

Между характеристиками V , S и M выпуклых тел имеют место изопериметрические неравенства. Выпишем некоторые из них:

$$S^2 \geq 3VM,$$

$$M^2 \geq 4\pi S,$$

$$M^3 \geq 48\pi^2 V.$$

В. Бляшке предложил каждому K из κ сопоставить точку (x, y) на плоскости, где (x, y) определил следующим образом:

$$x = \frac{4\pi S}{M^2}, y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}.$$

В понятиях интегрально-поперечных мер эти координаты будут выглядеть:

$$x = \frac{V_2 V_0}{V_1^2}, y = \frac{V_3 V_0^2}{V_1^3}.$$

Очевидно, что x и y принимают неотрицательные значения. Отображение $\kappa \rightarrow R^2$, предложенное Бляшке, обозначим через F , а образ пространства κ на плоскости R^2 через $\bar{\kappa}$. Важной проблемой является поиск границы множества $\bar{\kappa}$.

Рассмотрим выписанные выше изопериметрические неравенства. С учетом введенных переменных x и y эти неравенства примут следующий вид:

$$x^2 \geq y,$$

$$1 \geq x,$$

$$1 \geq y.$$

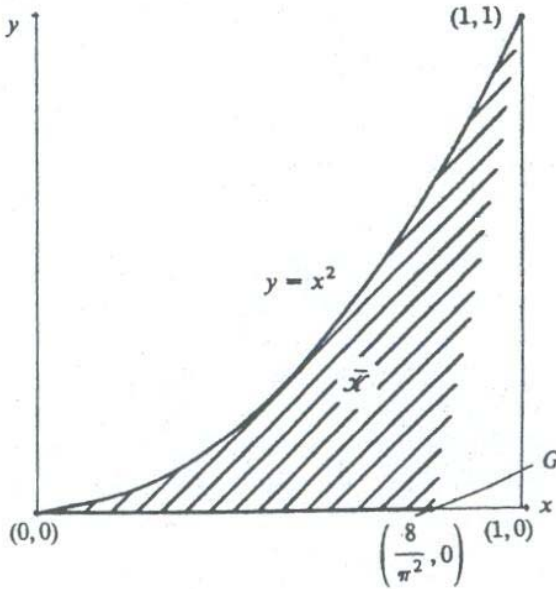


Рис. 2. Диаграмма Бляшке

Полученные неравенства позволяют утверждать, что $\bar{\kappa}$ является ограниченным множеством. Но не все множество, ограниченное этими неравенствами, есть $\bar{\kappa}$, в этом легко убедиться, рассмотрев неравенство $M^2 \geq 4\pi S$

для плоских выпуклых тел. Площадь поверхности $S(K)$ для таких тел равна двум площадям плоского тела, интеграл средней кривизны $M(K)$ равен произведению периметра на угол $\frac{\pi}{2}$, а объем равен 0. Тогда интересующее нас неравенство примет следующий вид:

$$2M^2 \geq \pi^3 S, V = 0,$$

или в терминах x, y :

$$\frac{8}{\pi^2} \geq x, y = 0.$$

Таким образом, граница от точки $\left(\frac{8}{\pi^2}; 0\right)$ до точки $(1; 1)$ неизвестна.

Некоторую оценку этой границы можно получить, используя неравенство Грёмера:

$$V \geq \frac{\pi S}{24M} \left(S - \frac{2M^2}{\pi^3} \right).$$

В терминах (x, y) получаем:

$$y \geq \frac{\pi}{8} x \left(x - \frac{8}{\pi^2} \right).$$

Пограничная парабола этого неравенства на рисунке обозначена G .

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Очевидно, что все подобные тела под действием F отображаются в одну и ту же точку на диаграмме Бляшке. Единственными прообразами точки диаграммы являются шары. Их образом является точка $(1, 1)$.

Прообразами точек параболической границы являются колпаки. Колпаком называется выпуклая оболочка шара и счетного числа внешних точек. Точки при этом заданы таким образом, что часть прямой, соединяющей любые две из них, пересекает шар.

Образом точек и отрезков является точка $(0, 0)$ на диаграмме. Плоские выпуклые тела отображаются на ось x , а круги – это единственные тела, чей

образ – точка $\left(\frac{8}{\pi^2}; 0\right)$.

5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для расчета характеристик выпуклых многогранников в трехмерном евклидовом пространстве и построения диаграммы Бляшке был создан программный продукт под названием “MBoundVisual”. Среда реализации – Delphi 7. Год создания – 2008.

Программа осуществляет построение выпуклых оболочек в трехмерном евклидовом пространстве по любому заданному набору точек, сохранение и загрузку наборов точек и рассчитанных оболочек, расчет интегралов поперечных мер Минковского, суммирование оболочек по Минковскому, построение диаграммы Бляшке.

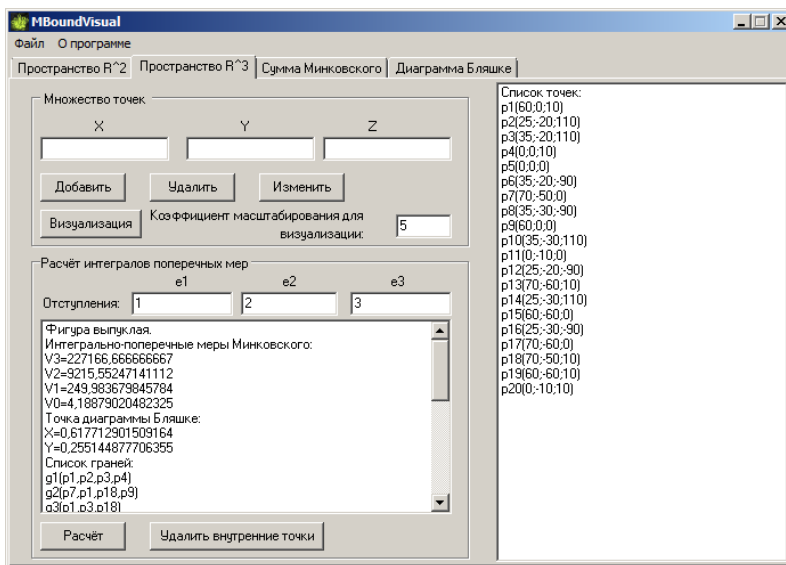


Рис. 3. Рабочее окно программы

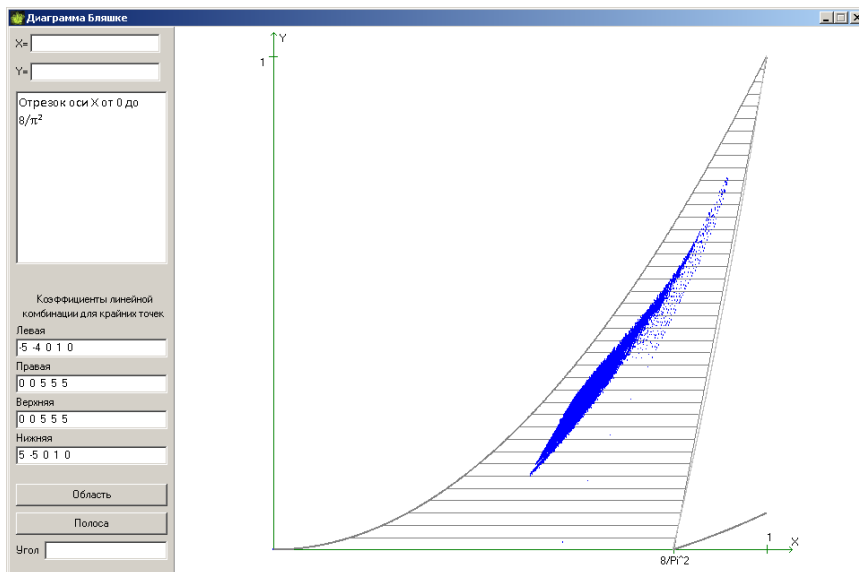


Рис. 4. Диаграмма Бляшке, заполненная точками для конкретной линейной комбинации

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. – Л.: Наука, 1980.
2. Бутовский М.М. Исследование свойств выпуклых многогранников в многомерных евклидовых пространствах. Дипломная работа. Рубцовск: Рубцовский индустриальный институт Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, 2008.
3. Васин Д.В. Диаграмма Бляшке множества выпуклых тел // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. Вып. 2. – 2002. – С. 5–9.
4. Тёрстон У. Трехмерная топология и геометрия / Пер. с англ. под ред. О.В. Шварцмана. – М.: МЦНМО, 2001.
5. Чаднов Р.В. Алгоритмы построения выпуклых оболочек и их применение в ГИС и САПР. Дипломная работа. Томск: Томский государственный университет, 2004.
6. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H.T. The QuickHull algorithm for convex hull. The Geometry Center, Minneapolis, 1993.

7. Chen J. Computational Geometry: Methods and Applications. Computer Science Department, Texas A&M University, 1996.
8. Peter M. Gruber. Convex and Discrete Geometry. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
9. Sangwine-Yager J.R. The Missing Boundary of the Blaschke Diagram, Amer. Math. Monthly, №96, 1989, p.233-237.
10. Vince John. Geometric Algebra for Computer Graphics. Springer-Verlag, London, 2008.