М. Ф. Антонцева

КОАЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БИСИМУЛЯЦИОННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

ВВЕДЕНИЕ

Теория категорий в последнее время стала активно использоваться в теории параллелизма для описания и изучения параллельных систем и процессов. Использование методов теории категорий позволило исследовать взаимосвязи между различными моделями [3]. Одним из наиболее широко применяемых понятий этой теории является понятие открытого морфизма.

В теории параллельного программирования существует множество различных поведенческих эквивалентностей, но самыми известными являются бисимуляционные эквивалентности. Две системы называются бисимуляционно эквивалентными, если наблюдатель не может найти различий в их поведении. В рамках теории категорий было предложено абстрактное понятие бисимуляции для различных параллельных моделей, определенное через конструкцию открытых морфизмов. В дальнейшем этот подход стал использоваться и для определения других видов эквивалентностей.

В [4] дан коалгебраический подход для описания поведенческой бисимуляции интерливинговых моделей — систем переходов. Коалгебра является двойственной к алгебре. Двойственность алгебраической и коалгебраической семантик показана в [5].

Цель данной работы — расширить эти два подхода (категориальный и коалгебраический) на модели истинного параллелизма, представленные системами переходов с независимостью и помеченными структурами событий.

1. МОДЕЛИ

1.1. Системы переходов

Определение 1.1.

1. ***T-система* —** это структура $(S, i, A, \rightarrow_S)$, где S — множество состояний с начальным состоянием *I*; A — множество меток; $\rightarrow_S \subseteq S \times A \times S$ — отношение перехода.

Пишем $s \xrightarrow{a}_S s'$, если $(s,a,s') \in \to_S$.

2. ***TI*-система —** это структура $(S,i,A,\to_S,I_S)$, где $(S,i,A,\to_S)$ — *T*-система и I_S — иррефлексивное, симметричное отношение, такое что

1) $(s,a,s') \approx (s,a,s'') \Rightarrow s' = s''$,
2) $(s,a,s')I_S(s,b,s'') \Rightarrow \exists\ u.\ (s,a,s')I_S(s',b,u)\ ,(s,b,s'')I_S(s'',a,u)$,
3) $(s,a,s')I_S(s',b,u) \Rightarrow \exists\ s''.\ (s,a,s')I_S(s,b,s'')$,
4) $(s,a,s') \approx (s'',a,u)I_S(w,b,w') \Rightarrow (s,a,s')I_S(w,b,w')$,

где $\approx$ — это наименьшее отношение эквивалентности, включающее отношение между переходами $\prec$, которое определяется так:
$(s,a,s') \prec (s'',a,u) \Leftrightarrow$

$$\exists\ b.\ (s,a,s')I_S(s',b,s''),\ (s,a,s')I_S(s',b,u),\ (s,b,s'')I_S(s'',a,u).$$

3. ***OTI*-система —** это *TI*-система $(S,i,A,\to_S,I_S)$, которая является достижимой, ацикличной и такая, что если $s' \xrightarrow{a}_S u,\ s'' \xrightarrow{b}_S u$ и эти переходы не совпадают, то

$$\exists\ s \in S.\ (s,b,s')I_S(s',a,s''),\ (s,b,s')I_S(s',a,u),\ (s,a,s'')I_S(s'',b,u).$$

Т.е. в *OTI*-системе любой квадрат независимости — невырожденный, другими словами, состоит из четырех различных состояний.

Определение 1.2. Пусть $\boldsymbol{S} = (S,i_S,A_S,\to_S,I_S)$ и $\boldsymbol{T} = (T,i_T,A_T,\to_T,I_T)$ — две *OTI*-системы. ***Морфизм*** *f*: $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{T}$ между ними — это пара $f = (\sigma,\lambda)$, где $\sigma : S \to T,\ \lambda : A_S \to A_T$, такие что выполнено:

1) $\sigma(i_S) = i_T$;
2) если $s \xrightarrow{a}_S s'$ и $\lambda(a)$ определено, то $\sigma(s) \xrightarrow{\lambda(a)}_T \sigma(s')$,
   если $s \xrightarrow{a}_S s'$ и $\lambda(a)$ не определено, то $\sigma(s) = \sigma(s')$;
3) если $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$ и $\lambda(a),\ \lambda(b)$ определено,
   то $\sigma(s) \xrightarrow{\lambda(a)}_T \sigma(s') I_T \sigma(u) \xrightarrow{\lambda(b)}_T \sigma(u')$.

OTI-системы вместе с морфизмами формируют категорию, которую обозначают $\mathbb{OTI}$. Пишем $\mathbb{OTI}_A$ для обозначения категории *OTI*-систем с множеством меток *A*.

1.2. Помеченные структуры событий

Определение 1.3. ***Помеченная структура событий*** **—** это структура $(E, \leq, \#, l)$, где E — множество событий; $l : E \to A$ — помечающая функция (A — алфавит); $\leq \subseteq E \times E$ — отношение причинной зависимости; $\# \subseteq E \times E$ — отношение конфликта (иррефлексивное, симметричное отношение), которое удовлетворяет условиям:

1) $\forall \ e \in E. \ \{d \in E \mid d \leq e\}$ — конечно (так называемый принцип "конечности причин");
2) $\forall \ e_1, e_2, e_3 \in E. \ e_1 \# e_2 \leq e_3 \Rightarrow e_1 \# e_3$ — (так называемый принцип "наследования конфликта").

Два события $e_1, e_2 \in E$ — ***параллельны*** (пишут $e_1 co e_2$), если

$$\left(\neg(e_1 \leq e_2), \neg(e_2 \leq e_1), \{e_1, e_2\} \not\in \#\right).$$

Определение 1.4. Пусть $\boldsymbol{E} = (E, \leq, \#, l)$ — помеченная структура событий. C — ***конфигурация***, если выполнено:

1) $\forall \ e, d \in E. \ e \in C \wedge d \prec e \Rightarrow d \in C$, $\prec = \leq \setminus id$;
2) $\forall \ e, e' \in E. \ \neg(e \# e')$.

Множество конфигураций структуры событий обозначается *C(E)*.

Определение 1.5. Пусть $\boldsymbol{E} = (E, \leq, \#, l)$, $\boldsymbol{E}$\` $= (E', \leq', \#', l')$ — две помеченные структуры событий над алфавитами A и A' соответственно. ***Морфизм*** между ними — это $f = (\eta, \lambda) : E \to E'$, где $\eta : E \to E'$, $\lambda : A \to A'$ — частичные функции, такие что выполнено:

1) $l' \circ \eta = \lambda \circ l$;
2) если c — конфигурация E, то ηc — конфигурация E', и если $\forall \ e_1, e_2 \in c$ и их образы определены и $\eta(e_1) = \eta(e_2)$, то $e_1 = e_2$.

$\mathbb{E}$ — категория помеченных структур событий с морфизмами.

2. ОТКРЫТЫЕ МОРФИЗМЫ

Определим категорию мультимножеств $\mathbb{Pom}_A$ относительно множества меток A как полную подкатегорию $\mathbb{E}_A$ (категория помеченных структур событий с морфизмами над множеством меток A), чьи объекты — это конечные мультимножества, т.е. частично упорядоченные помеченные события.

Тогда вычисление в структуре событий E можно представить как морфизм в $\mathbb{E}_A$: $p : P \to E,\ P \in \mathbb{P}\mathbb{om}_A$.

Так как структуры событий (и также мультимножества) вкладываются в TI-системы [2, 3], то вычисление в $T \in \mathbb{TI}_A$ представляется морфизмом $p : P \to T$ в $\mathbb{TI}_A$, где P — образ объекта $\mathbb{P}\mathbb{om}_A$ под действием вложения.

Пусть $\mathbb{M}$ — категория моделей, $\mathbb{P}$ $\mathbb{M}$, $\mathbb{P}$ — подкатегория $\mathbb{M}$. Определим вычисление в $X \in \mathbb{M}$ как морфизм $p : P \to X$ в $\mathbb{M}$, где $P \in \mathbb{P}$. Тогда любой морфизм в $\mathbb{M}$ $f : X \to Y$ переводит такое вычисление p в X в вычисление $f \circ p : P \to Y$ в Y.

Определение 2.1. Пусть $P, Q \in \mathbb{P}$, $X, Y \in \mathbb{M}$. Пусть $f : X \to Y$ – морфизм в $\mathbb{M}$, $m : P \to Q$ – морфизм в $\mathbb{P}$, $p : P \to X$ – вычисление в X, $q : Q \to Y$ – вычисление в Y.

Тогда $f : X \to Y$ называют $\mathbb{P}$-***открытым морфизмом***, когда f удовлетворяет условию: если $q \circ m = f \circ p$, то существует морфизм $p' : Q \to X$, такой что $p' \circ m = p$ и $f \circ p' = q$.

Определение 2.2. Пусть $\mathbb{M}$ — категория моделей, $\mathbb{P}$ $\mathbb{M}$, $\mathbb{P}$ — подкатегория $\mathbb{M}$. Пусть $X_1, X_2 \in \mathbb{M}$. Говорят, что X_1, X_2 — $\mathbb{P}$-***бисимулятивны*** с бисимуляцией X, если существует “хорда” $\mathbb{P}$-открытых морфизмов $f_1 : X \to X_1, f_2 : X \to X_2$.

Предложение 2.3 [2]. *$\mathbb{P}\mathbb{om}_A$-открытые морфизмы в $\mathbb{TI}_A$ — это морфизмы $(\sigma, 1_A) : T_1 \to T_2$, где 1_A — тождественное отображение на множестве A, такие что:*

1) *если* $\sigma(s) \xrightarrow{a}_{T_2} t'$, *то* $\exists\ \ s' \in S.\ s \xrightarrow{a}_{T_1} s'$ *и* $\sigma(s') = t'$;
2) *если* $s \xrightarrow{a}_{T_1} s', s \xrightarrow{b}_{T_1} s''$ *и* $\sigma(s) \xrightarrow{a}_{T_2} \sigma(s') I_{T_2} \sigma(s') \xrightarrow{b}_{T_2} \sigma(s'')$,

   то $s \xrightarrow{a}_{T_1} s' I_{T_1} s' \xrightarrow{b}_{T_1} s''$.

3. *F*–КОАЛГЕБРЫ

Определение 3.1. Пусть $F : Set \to Set$ — функтор. Тогда ***F-коалгебра*** — это пара (S, α_S), состоящая из множества S и функтора $\alpha_S : S \to F(S)$.

Определение 3.2. Пусть (S,α_S) и (T,α_T) — две F-коалгебры. ***Гомоморфизм F-коалгебр*** (или ***F-гомоморфизм***) — это функция $f : S \to T$, удовлетворяющая равенству $F(f)\circ\alpha_S = \alpha_T \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{S} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_S"'] & \boldsymbol{T} \arrow[d, "\alpha_T"] \\
\boldsymbol{F(S)} \arrow[r, "F(f)"'] & \boldsymbol{F(T)}
\end{tikzcd}$$

Композиция двух F-гомоморфизмов тоже F-гомоморфизм, и тождественное отображение F-коалгебр — F-гомоморфизм. Следовательно, набор всех F-коалгебр с F-гомоморфизмами образуют категорию, которая обозначается $\mathbf{Set}_F$.

Определение 3.3. Пусть (S,α_S) и (T,α_T) — две F-коалгебры. ***F-бисимуляция*** между ними — это отношение $R \subseteq S\times T$, такое что существует функтор $\alpha_R : R \to F(R)$ (т.е. (R,α_R) F-коалгебра), удовлетворяющий условию: проекции $\pi_1 : R \to S$ и $\pi_2 : R \to T$ являются F-гомоморфизмами.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{S} \arrow[d] & \boldsymbol{R} \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "\exists\alpha_R"'] & \boldsymbol{T} \arrow[d] \\
\boldsymbol{F(S)} & \boldsymbol{F(R)} \arrow[l, "F(\pi_1)"] \arrow[r, "F(\pi_2)"'] & \boldsymbol{F(T)}
\end{tikzcd}$$

Теорема 3.4 [4]**.** *Пусть* (S,α_S) *и* (T,α_T) *— две F-коалгебры. Функция* $f : S \to T$ *является F-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда ее граф G(f) — это F-бисимуляция между данными F-коалгебрами.*

4. СВЯЗЬ КОАЛГЕБР И МОДЕЛЕЙ

4.1. *OTI-с*истемы и F^I –коалгебры

Рассмотрим помеченную *TI*-систему $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$.

Определим $\alpha_S^I : S \to \mathcal{P}(A \times S \times (S \times A \times S))$ следующим образом:

$$\forall \quad s \in S \quad s \mapsto \left\{ < a, s', I_{as} > \mid s \xrightarrow{a}_S s' \right\},$$

где $I_{as} = \left\{ < u, b, u' > \mid s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u' \right\}$.

Построим $F^I(X) = \alpha_S^I(X \cap S) \ \forall \ X \in Set$. Тогда $F^I : Set \to Set$ — функтор (это легко показать), и (S, α_S^I) — коалгебра. Таким образом, любая *TI*-система $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$ соответствует F^I-коалгебре. И наоборот, любая F^I-коалгебра соответствует *TI*-системе $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$:

- $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u' \Leftrightarrow < a, s', u, b, u' > \in \alpha_S^I(s)$;
- $s \xrightarrow{a}_S s'$ и нет переходов, с ним независимых $\Leftrightarrow < a, s', \varnothing > \in \alpha_S^I(s)$.

Т. е. класс *TI*-систем совпадает с классом F^I-коалгебр. Далее будем рассматривать подкласс *TI*-систем — *OTI*-системы.

Утверждение 4.1. *Пусть* $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$ *и* $\left(T, i_T, A, \to_T, I_S\right)$ *— две OTI-системы,* (S, α_S^I) *и* (T, α_S^I) *— соответствующие им* F^I*-коалгебры. Тогда* F^I*-гомоморфизм между ними — это морфизм* $(f, 1_A) : S \to T$ *в* $\mathbb{OTI}_A$*, который удовлетворяет:*

1) если $f(s) \xrightarrow{a}_T t'$*, то* $\exists \ s'.\ s \xrightarrow{a}_S s'$ *и* $f(s') = t'$;

2) если $s \xrightarrow{a}_S s'$, $u \xrightarrow{b}_S u'$, $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{b}_T f(u')$,

то $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$.

Доказательство. Пусть $f : S \to T$ — F^I-гомоморфизм между *S* и *T*, т.е. удовлетворяет равенству $F^I\left(f\right) \circ \alpha^I{}_S = \alpha_T^I \circ f$. Надо доказать, что для *f* выполняется:

1) если $s \xrightarrow{a}_S s'$, то $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s')$;

2) если $s \xrightarrow{\ a\ }_S s' I_S u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$, то

$$f(s) \xrightarrow{\ a\ }_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{\ b\ }_T f(u');$$

3) если $f(s) \xrightarrow{\ a\ }_T t'$, то $\exists \ \ s' \in S.\ \ s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$ и $f(s') = t'$;

4) если $s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$, $u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$ и $f(s) \xrightarrow{\ a\ }_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{\ b\ }_T f(u')$, то $s \xrightarrow{\ a\ }_S s' I_S u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$.

Пусть $s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$, и нет переходов, с ним независимых. Это равносильно тому, что $< a, s', \varnothing > \in \alpha_S^I(s)$. Тогда $F^I < a, s', \varnothing > = < a, f(s'), \varnothing >$ по построению F^I . Так как

$$F^I\left(f\right) \circ \alpha_S^I(s) = \alpha_T^I \circ f(s) \ \ \forall \ \ s \in S,$$

то $< a, f(s'), \varnothing > \in \alpha_T^I(f(s))$, что равносильно $f(s) \xrightarrow{\ a\ }_T f(s')$.

Пусть $s \xrightarrow{\ a\ }_S s' I_S u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$. Тогда $< a, s', u, b, u' > \in \alpha_S^I(s)$ и

$$< a, f(s'), f(u), b, f(u') > \in F^I(f) \circ \alpha_S^I(s) .$$

Так как f — F^I *-гомоморфизм*, то $< a, f(s'), f(u), b, f(u') > \in \alpha_T^I(f(s))$ и следовательно,

$$f(s) \xrightarrow{\ a\ }_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{\ b\ }_T f(u') .$$

Пусть $f(s) \xrightarrow{\ a\ }_T t'$, т.е. $< a, t', \varnothing > \in \alpha_T^I(f(s))$. Так как

$$F^I\left(f\right) \circ \alpha_S^I(s) = \alpha_T^I \circ f(s) \ \ \forall \ \ s \in S,$$

то $< a, t', \varnothing > \in F^I(f) \circ \alpha_S^I(s)$. Отсюда следует, что существует $s \in S$, такое что $s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$ и $< a, t', \varnothing > = F^I(f) < a, s', \varnothing > = < a, f(s'), \varnothing >$. Поэтому $t = f(s')$.

Пусть $s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$, $u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$ и $f(s) \xrightarrow{\ a\ }_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{\ b\ }_T f(u')$.

Тогда

$$< a, f(s'), f(u), b, f(u') > \in \alpha_T^I(f(s)) .$$

Так как $F^I\left(f\right) \circ \alpha_S^I(s) = \alpha_T^I \circ f(s) \ \ \forall \ \ s \in S$, то

$$< a, f(s'), f(u), b, f(u') > \in F^I(f) \circ \alpha_S^I(s) ,$$

т.е. $s \xrightarrow{\ a\ }_S s' I_S u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$.

Таким образом, мы показали, что если $f: S \to T$ — F^I-гомоморфизм между S и T, то он является морфизмом, который удовлетворяет пп. 1–2 утверждения.

Обратное очевидно.

Утверждение 4.1 доказано. ■

Теорема 4.2. *Пусть* $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ *и* $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$ *— две OTI-системы,* (S, α_S^I) *и* (T, α_S^I) *— соответствующие им* F^I*-коалгебры. Тогда* F^I*-бисимуляция между ними — это отношение* $R \subseteq S \times T$*, такое что* $\forall\ <s,t> \in R$ *выполнено:*

1) $\forall\ s' \in S$ *если* $s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$, *то* $\exists\ t' \in T.\ t \xrightarrow{\ a\ }_T t'$ *и* $<s',t'> \in R$;

2) $\forall\ t' \in T$ *если* $t \xrightarrow{\ a\ }_T t'$, *то* $\exists\ s' \in S.\ s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$ *и* $<s',t'> \in R$;

3) $\forall\ s', u, u' \in S$ *если* $s \xrightarrow{\ a\ }_S s' I_S u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$, *то*

$\exists\ t', w, w' \in T.\ t \xrightarrow{\ a\ }_T t' I_T w \xrightarrow{\ b\ }_T w'$ *и* $<s',t'>, <u,w>, <u',w'> \in R$;

4) $\forall\ t', w, w' \in T$ *если* $t \xrightarrow{\ a\ }_T t' I_T w \xrightarrow{\ b\ }_T w'$, *то*

$\exists\ s, u, u' \in S.\ s \xrightarrow{\ a\ }_S s' I_S u \xrightarrow{\ b\ }_S u'$ *и* $<s',t'>, <u,w>, <u',w'> \in R$.

Доказательство. Пусть $R \subseteq S \times T$ — F^I-бисимуляция между $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ *и* $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$. Тогда по определению 3.3 существует функтор $\alpha_R^I : R \to F(R)$ такой, что (R, α_R^I) — F^I-коалгебра. Тогда α_R^I индуцирует отношение перехода $\to_R \subseteq R \times A \times R$.

Пусть $<s,t> \in R$, $s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$ и $\pi_1 <s,t> = s$. Из этого следует, что $\pi_1 <s,t> \xrightarrow{\ a\ }_S s'$, и так как π_1 — F^I-гомоморфизм, то по определению 3.3 существует $<s'',t'> \in R$ такое, что $<s,t> \xrightarrow{\ a\ }_R <s'',t'>$ и $\pi_1 <s'',t'> = s'$. Следовательно, $<s',t'> \in R$. Так как π_2 — F^I-гомоморфизм, то $t \xrightarrow{\ a\ }_T t'$.

Таким образом мы доказали, что для любого $s' \in S$, если $s \xrightarrow{\ a\ }_S s'$, то $\exists\ t' \in T.\ t \xrightarrow{\ a\ }_T t'$ и $<s',t'> \in R$. Доказательство 2–4 — аналогично.

Мы доказали, что если отношение $R \subseteq S \times T$ — F^I-бисимуляция, то R удовлетворяет 1–4.

Обратно: пусть $R \subseteq S \times T$ удовлетворяет 1–4.

Определим $\alpha_R^I : R \to F(R)$ для $< s,t > \in R$ следующим образом:

$$\alpha_R^I < s,t >= \left\{ < a, < s',t' >, I_{a<s,t>} > \mid s \xrightarrow{\ a\ }_S s', t \xrightarrow{\ a\ }_T t' \ \text{и} \ < s',t' > \in R \right\},$$

где
$$I_{a,<s,t>} = \left\{ \begin{array}{l} << u,w >, b, < u',w' >> \mid s \xrightarrow{\ a\ }_S s' I_S u \xrightarrow{\ b\ }_S u', \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \xrightarrow{\ a\ }_T t' I_T w \xrightarrow{\ b\ }_T w' \\ \text{и} \ < s',t' >, < u,w >, < u',w' > \in R \end{array} \right\}.$$

Тогда легко показать, что (R, α_R^I) — F^I-коалгебра и проекции из R в S и в T — это F^I-гомоморфизмы. Следовательно, отношение $R \subseteq S \times T$ — F^I-бисимуляция между $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$ и $\left(T, i_T, A, \to_T, I_S\right)$.

Теорема 4.2 доказана. ■

Теорема 4.3. *Для OTI-систем над алфавитом A* $\mathbb{Pom}_A$*-открытые морфизмы совпадают с* F^I*-гомоморфизмами соответствующих им* F^I*-коалгебр.*

Доказательство. Следствие утверждения 4.1 и предложения 2.3. ■

Теорема 4.4. *Для OTI-систем над алфавитом A* $\mathbb{Pom}_A$*–бисимуляция совпадает с* F^I*-бисимуляцией соответствующих им* F^I*-коалгебр.*

Доказательство. Пусть $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$ и $\left(T, i_T, A, \to_T, I_S\right)$ — две *OTI*-системы, (S, α_S^I) и (T, α_S^I) — соответствующие им F^I-коалгебры. Пусть $R \subseteq S \times T$ — F^I-бисимуляция между ними. Так как по теореме 4.3 F^I-гомоморфизмы совпадают с $\mathbb{Pom}_A$-открытыми морфизмами, то по определению 2.2 R — $\mathbb{Pom}_A$-бисимуляция между $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$ и $\left(T, i_T, A, \to_T, I_S\right)$.

Обратно: пусть R — $\mathbb{Pom}_A$–бисимуляция между $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$ и $\left(T, i_T, A, \to_T, I_S\right)$. По определению 2.2 существуют $\mathbb{Pom}_A$–открытые морфизмы $f_1 : R \to S$, $f_2 : R \to T$, которые по теореме 4.3 являются F^I-

гомоморфизмами. В качестве f_1 и f_2 возьмем проекции из R в S и в T. Строим $\alpha_R^I : R \to F^I(R)$, как в доказательстве теоремы 4.2. Тогда (R, α_R^I) — F^I-коалгебра и проекции из R в S и в T — это F^I-гомоморфизмы. Т. е. отношение $R \subseteq S \times T$ — F^I-бисимуляция между (S, α_S^I) и (T, α_S^I).

Теорема 4.4 доказана. ■

Теорема 4.5. *Пусть* $\left(S, i_S, A, \to_S, I_S\right)$ *и* $\left(T, i_T, A, \to_T, I_S\right)$ *— две OTI-системы. Функция* $f : S \to T$ *является* $\mathbb{Pom}_A$*-открытым морфизмом тогда и только тогда, когда ее граф* $G(f)$ *— это* F^I*-бисимуляция соответствующих им* F^I*-коалгебр.*

Доказательство. Следствие теоремы 3.4, теоремы 4.3 и теоремы 4.4 ■

4.2. Помеченные структуры событий и коалгебры

Рассмотрим помеченную структуру событий $(E, \leq, \#, l)$. Определим ее “развертку” $les.otsi(E)$ как *TI*-систему $les.otsi(E) = (S, i_S, A, \to_S, I_S)$ [3], где S — множество конечных конфигураций структуры событий, $i_S = \varnothing$;
$A = l(E)$;
$c \xrightarrow{a}_S c' \Leftrightarrow c = c' \setminus \{e\},\ l(e) = a,\ e \in E;$
$c \xrightarrow{a}_S c' I_S \overline{c} \xrightarrow{b}_S \overline{c}' \Leftrightarrow (c' \setminus c) co (\overline{c}' \setminus \overline{c}).$

Утверждение 4. 6 [3]. $les.otsi(E)$ *— OTI-система.*

Следующая теорема является следствием теоремы 4.4.

Теорема 4.7. *Две помеченные структуры событий* $\mathbb{Pom}_A$*-бисимулятивны тогда и только тогда, когда* F^I*-коалгебры, соответствующие их “разверткам” в OTI–системы,* F^I*-бисимулятивны.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статья посвящена исследованию распределенных систем, таких как системы переходов с независимостью и помеченные структуры событий. Для исследования применялись два подхода, которые стали активно использоваться в теории параллелизма сравнительно недавно для спецификации и верификации параллельных процессов. Это коалгебраический и категориальный подходы. В ходе работы стало ясно, что некоторые определенные свойства интерливинговых моделей можно распространить на модели с “истинным” параллелизмом, такие как *OTI*-системы. Однако для *TI*-систем эти свойства не выполняются.

В дальнейшем планируется, используя коалгебраические методы, изучить взаимосвязи между различными временными сетевыми моделями, а также исследовать новые поведенческие эквивалентности, учитывая также временные аспекты поведения систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вирбицкайте И. Б.** Семантические модели в теории параллелизма. — Новосибирск: ИСИ СОРАН, 2000. — 190 с.
2. **Joyal A., Nilsen M., Winskel G.** Bisimulation From Open Maps // Information and Computation. — 1996. — N 127. — P. 164–185.
3. **Nilsen M., Sassone V., Winskel G.** Relationships Between Models of Concurrency // Theor. Comput. Sci. — 1994. — N 803. — P. 425–476.
4. **Rutten J. J.** Universal coalgebra: a theory of systems // Theor. Comput. Sci. — 2000. N 249. — P. 3–80.
5. **Rutten J. J., Turi D.** Initial Algebra and Final Coalgebra Semantics for Concurrency // EATS. — 2000. — N 62. — P. 530–559.