В. А. Евстигнеев

КОНВЕЙЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕВОЗОК КАК МОДЕЛЬ ПЕРЕСЫЛКИ ПРОТЯЖЕННЫХ СООБЩЕНИЙ*

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известная транспортная задача по стоимости сводится к отысканию наибольшего потока в двухполюсной сети с наименьшей стоимостью и не содержит в явном виде понятия времени. Введение времени в модель перевозки однородного груза требует пересмотра основных условий задачи. Так вместо указания общего количества груза, перевозимого по данной дуге, как это делается в обычной сетевой транспортной задаче, указывается наибольшее количество груза, перевозимого за единицу времени, причем поток в новом смысле удовлетворяет всем ограничениям в определении потока в старом смысле. Но изменяется модель перевозок: груз считается разбитым на порции, каждая из которых есть наибольшее количество груза, перевозимого за единицу времени по данной дуге. Поэтому общее количество перевозимого по дуге груза определяется, кроме всего прочего, временем, в течение которого осуществляются перевозки. Подобный характер организации перевозок называется *конвейерной моделью перевозок.*

Интерес к этой задаче, которой автор занимался в конце 60-х–начале 70-х гг. [1–3], может пробудить так называемая “червеобразная” модель пересылки сообщений в мультипроцессорных и мультикомпьютерных системах. Эта модель предполагает, что сообщение занимает в сети межпроцессорной связи заметный временной интервал, что позволяет сравнивать сообщение с “червем” с фиксированными длиной и шириной. Это эквивалентно предположению о том, что сообщение представимо в виде “цуга” (последовательности) порций информации, величина которых равна ширине “червя”, а их количество равно длине “червя”.

В простейшем случае, когда ширина сообщения не изменяется при движении по различным дугам, задача не отличается оригинальностью и сводится к задаче о нахождении кратчайшего пути в сети, получаемой из данной удалением дуг, пропускная способность которых меньше ши-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-794) и Министерства образования РФ.

рины “червя”. Другое дело, если ширина сообщения зависит от такого параметра, как пропускная способность дуги. При этом ширина сообщения, пересылаемого по пути P, состоящего из k дуг, равна “объему” сообщения, деленному на наименьшую пропускную способность среди k дуг, составляющих путь P. Тогда возникает минимаксная задача отыскания кратчайшего пути с наибольшей пропускной способностью.

В общем случае сообщение рассыпается на порции информации, которые пересылаются параллельно по нескольким путям различной длины и пропускной способности. Мы оставляем пока в стороне механизм рассыпания на порции и последующей сборки сообщения и рассмотрим здесь основные результаты, касающиеся конвейерной организации перевозок. Это требует уточнения ряда определений, таких как динамический поток, план перевозок, многополюсные потоки и др., которые не объяснялись так подробно, как того они заслуживали, что делало чтение соответствующих статей крайне затруднительным.

Все неопределяемые здесь понятия могут быть найдены в [4].

2. СЕТЕВАЯ ЗАДАЧА ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ДВУХПОЛЮСНЫХ СЕТЕЙ И ПОНЯТИЕ ПОТОКА

Указанная в заголовке задача возникает при решении задачи о наибольшем количестве груза, которое можно перевезти по сети с входом s, в котором хранится груз P, в выход q за фиксированное время T. Для ее решения напомним постановку обычной транспортной задачи по стоимостному критерию.

Пусть дана ориентированная двухполюсная сеть $G(s,q) = (V,E;s,q)$ с входом s и выходом q, каждой дуге которой сопоставлено натуральное число $c(e) > 0$, называемое *пропускной способностью дуги* e. Заметим, что случай перевозок однородного груза по многополюсной сети с входами $s_1,\ldots,s_k$ и выходами $q_1,\ldots,q_l$ легко сводится к двухполюсному случаю введением фиктивных входа s_0 и выхода q_0. Величина $c(e),\ e \in E$, ограничивает объем перевозимого по дуге e груза. Требуется обеспечить перевозку P единиц размещенного (или производимого в s) груза по сети G, не допуская превышения пропускных способностей дуг. Математической моделью задачи о перевозках служит наибольший поток [5].

Определение 1. *Потоком* f по сети G называется целочисленная функция, определенная на множестве дуг E и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $0 \le f(e) \le c(e)$;
2. $\sum_v f(v,w) = \sum_x f(w,x),\ w \ne s,q$.

Здесь первое суммирование ведется по дугам, заходящим в w, а второе — по дугам, исходящим из w.

Определение 2. Число $F_f = \sum_v f(s,v) = \sum_v f(v,t)$ называется *величиной (мощностью) потока* f. Поток f_0, величина F_0 которого наибольшая из всех возможных потоков по сети G, называется *наибольшим потоком.*

Очевидно, что если $P = F_0$, то построение наибольшего потока полностью решает задачу; при $P > F_0$ задача не имеет решения, при $P < F_0$ решение сводится к построению ограниченного по величине потока.

Если дугам e сети G сопоставлены числа $b(e)$ — стоимости перевозки единицы груза по дуге e, то величина $B(f) = \sum_e f(e)b(e)$ называется *стоимостью потока* f. Наибольший поток с минимальной стоимостью называется *оптимальным потоком.* Поток произвольной величины F_f, где $0 < F_f \le F_0$, с наименьшей стоимостью называется *оптимальным потоком величины* F_f.

Известно, что от одного потока f_1 к другому f_2 той же мощности можно перейти с помощью операции *сдвига на цикле.* Однако более эффективным является последовательное построение оптимального потока с помощью отыскания увеличивающей поток цепи наименьшей длины. Отыскание цепи проводится алгоритмом Дейкстры, при этом считается, что длина (стоимость, время перевозки) дуги с ненулевым потоком, проходимой против ориентации, отрицательна. Достоинство этого подхода состоит в том, что мы на каждом шаге имеем *цепное разложение потока.* Другими словами, на каждом шаге алгоритма построения потока мы имеем множество s,q-путей (хотя речь идет о цепном разложении) $\{P_1, \ldots, P_r\}$ таких, что для каждой дуги e имеем

$$f(e) = \sum_{k \mid P_k \ni e} f_k(e),$$

где суммирование ведется по всем путям P_k, содержащим дугу e.

3. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИАГРАММА

Рассмотрим задачу о перевозке наибольшего количества груза по сети за заданное время. При этом, как мы уже указывали, пропускная способность дуги $c(e)$ ограничивает количество груза, поступающего на вход дуги e за единицу времени.

Будем обозначать через $t(e)$ время перевозки единицы груза по дуге e, так что единица груза, поступив на вход дуги в момент t_0, покидает ее в момент $t_0 + t(e)$.

Утверждение 1. Пусть G представляет собой путь вида $\pi = (s = v_0, v_1, \ldots, v_k = q)$. Тогда единица груза проходит этот путь за время $t(\pi) = \sum_{i=1}^{k} t(v_{i-1}, v_i)$. За заданное время T по сети G будет перевезено

$$P(T) = \begin{cases} 0, \text{ если } T < t(\pi); \\ F(\pi), \text{ если } T = t(\pi); \\ F(\pi)(T - t(\pi) + 1), \text{ если } T > t(\pi). \end{cases}$$

Здесь

$$F(\pi) = \min_i c(v_{i-1}, v_i), \ 1 \le i \le k.$$

Заметим, что $F(\pi)$ есть величина наибольшего потока $f(\pi)$ по сети G и $\{\pi\}$ есть цепное разложение потока $f(\pi)$.

Пусть дана целочисленная решетка $L(t, v)$, строки которой соответствуют некоторой дискретной шкале времени, а столбцы — вершинам сети G, так что первый столбец соответствует входу s сети, а последний — выходу q. Элемент d_{tv} отражает состояние вершины v в момент времени t, т.е. количество груза, находящегося в данный момент в этой вершине. Итак, мы заменяем каждую вершину v множеством вершин $\{v_{t_0}, v_{t_0+1}, \ldots, v_{t_0+k}, \ldots\}$, где момент t_0 для каждой вершины определяется как наименьшее время, требуемое для достижения вершины v из входа s. Эти вершины соединим дугами $(v(t), v(t+1))$. Каждую вершину v_{it} соединяем дугой с вершиной $v_{(j,t+t(i,j))}$ для всех пар (v_i, v_j), соответствующих дугам в исходной сети, и для всех моментов времени, больших начального момента t_0, определяемого для каждой вершины.

Граф, построенный на целочисленной решетке $L(t, v)$, называется **пространственно-временной диаграммой** (ПВД).

Если сеть G состоит из одного пути π, то пространственно-временная диаграмма будет иметь вид:

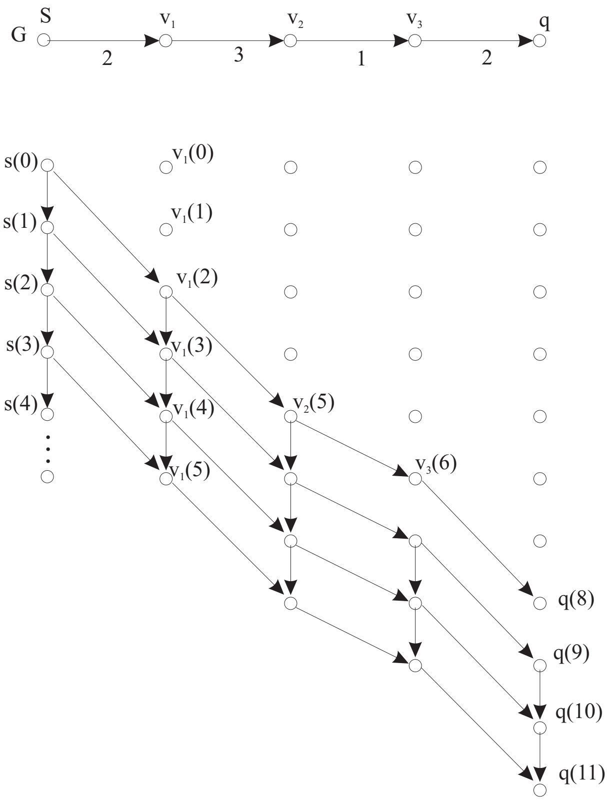


Рис. 1.

План перевозок для данной задачи имеет вид таблицы с T строками и n столбцами, т.е. план перевозок есть сокращенная запись ПВД. Заметим, что поток по ПВД является статическим, т.е. по каждому пути поток имеет мощность $c(\pi)$ и что перевозки можно организовать так, чтобы ни в одной вершине груз не задерживался. Например, до узкого места в пути π идут дуги с большой пропускной способностью, так что возникает мысль переправить максимальное количество груза в промежуточные вершины, а затем перевозить их по мере освобождения дуг. Можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Задержки груза в промежуточных вершинах процесс перевозок не улучшают.

В общем случае, когда цепное разложение потока состоит из h путей, план перевозок получается сложением планов перевозок по отдельным цепям.

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТОК

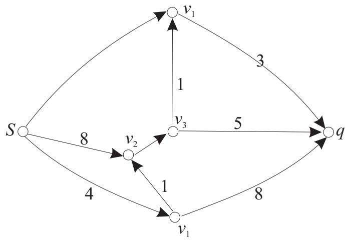
Из определения ПВД следует, что ее можно свернуть, заменив множество вершин $\{v_{t_0}, v_{t_0+1}, ...\}$ на вершину v и “параллельные дуги” вида $(v_{it}, v_{j,t+t_{i,j}})$ — дугой (v_i, v_j). Другими словами, мы возвращаемся к исходной сети, но уже с другой моделью перевозок, получаемой свертыванием статического потока (т.е. потока в обычном смысле) в *динамический поток.* Под последним мы понимаем набор потоков $f_1, f_2, \ldots, f_k (= f)$ с цепными разложениями $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$. При этом существуют такие моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_k$, что

$$f_{din} = \begin{cases} 0, \text{ если } T < t_0; \\ f_1, \text{ если } t_0 \leq T < t_1; \\ \vdots \\ f_k, \text{ если } T \geq t_k. \end{cases}$$

Моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_k$ определяются следующим образом. Пусть P_1 — кратчайший путь из s в q с множеством дуг E_{p_1}. По ним идет поток f_1. Пусть G_1 — остаточная сеть G_1, полученная из G удалением пути P_1 в том смысле, что дуги из пути P_1 заменяются дугами с пропускной способностью $c(i,j) - f(i,j)$. Заметим, что как минимум одна дуга будет удалена из-за своей насыщенности, т.е. для нее $C(i,j) = f_1$. Чтобы можно было решить нашу задачу, разрешаем проходить дуги с потоком $f(e) > 0$ в направлении, противоположном ее ориентации.

В остаточной сети G_1 отыскиваем кратчайший путь P_2 (точнее, кратчайшую цепь), так как мы будем проходить дуги с $f > 0$ в направлении, противоположном их ориентации. Эту задачу можно решить алгоритмом Дейкстры. В общем случае после отыскания цепи происходит автоматическая перестройка цепного разложения, в котором число отдельных путей становится на 1 больше и самый короткий путь в цепном разложении π_2 уже не совпадает с исходным. Однако следует заметить, что план перевозок для цепного разложения $\{\pi_1\}$ не изменяется и не влияет на окончательный результат. Длина кратчайшей цепи P_2 является моментом t_2 в определении динамического потока.

Пример. Пусть G имеет вид:



Динамический поток для сети на рис. 2 имеет вид:

Рис. 2.

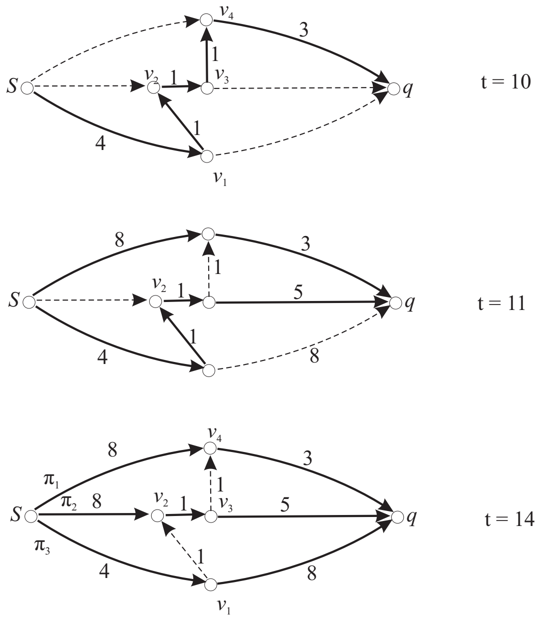


Рис. 3.

План перевозок для динамического потока f_1 / f_2 / f_3 показан на рис. 4.

t	S	v_1	v_2	v_3	v_4	q
1	$P-3$					
2	$P-6$					
3	$P-8$					
4	$P-10$					
5	$P-11$	1				
6		1				
7		1				
8		1			1	
9			1		1	
10			1	1	1	
11				1	1	1
12					1	3
13					1	5
14						8
15						11

Рис. 4.

Главное, что нужно отметить, это то, что динамический поток определяет возможность направить новые порции груза на дуги с ненулевым потоком. При изменении потока так, что часть порций груза осталась на дугах с измененным потоком, они заканчивают свое движение по таким дугам в прежнем режиме (к выходу сети).

Таким образом, изменение потока не вызывает уничтожения движущихся порций. И кроме того, можно не обращать внимание, по каким путям пересылались порции груза в самом начале перевозок. Это позволяет строить окончательный план перевозок на основе цепного разложения последнего использованного динамического потока.

5. МНОГОПОЛЮСНЫЕ СЕТИ

Рассмотрим теперь задачу организации перевозки однородного груза из входов $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ с запасами (или объемом производства), равными $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, в выходы $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ с потребностями

$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_m\}$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{l=1}^{m} Q_l.$$

5.1. Сети с одним входом

Рассмотрим сеть, показанную на рис. 5. Предположим, что пропускные способности всех дуг одинаковы и равны 1.

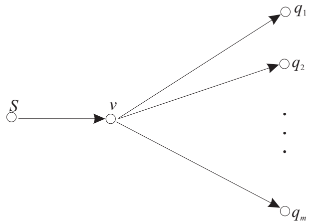


Рис. 5.

Длины дуг, исходящих из v, равны $\theta_1, \ldots, \theta_m$, причем предполагаем, что

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \ldots \geq \theta_m.$$

Динамический поток, равный 1 на дуге (s, v), принимает ненулевое значение последовательно на дугах (v, q_1), (v, q_2) и т. д. В работе [6] при определении многополюсных потоков не было подчеркнуто, что указание только допустимых размеров потока без указания временных интервалов существования потоков на дугах вида (v, q_k) есть небрежность, запутывающая читателя.

С комбинаторным подходом к решению многополюсной транспортной задачи по времени можно ознакомиться в работе [7].

5.2. Многополюсные сети

Нетрудно убедиться, что решение транспортной задачи по времени для такой сети определяется на основе принципа “первым удовлетворяется спрос самого дальнего выхода” [2, 3].

В общем случае пары (s_i, q_j) находятся с помощью решения вспомогательной матричной транспортной задачи по времени, где величины t_{ij}

определяются из решения для каждой пары вход–выход двухполюсной транспортной задачи по времени. После этого решается общая задача как задача динамического программирования [1].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на близость рассматриваемой задачи к задаче о червеобразной посылке сообщений, они всё-таки отличаются, так как процесс перевозок включает в себя процесс рассыпания груза на порции, перемещающиеся по различным путям. Это требует обратной сборки сообщения. Больший прогресс можно достичь при планировании спонтанно возникающих червеобразных сообщений между полюсами в многополюсной сети. Здесь может оказаться полезной матричная транспортная задача по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Евстигнеев В.А.** Транспортная задача по времени для многополюсных сетей // Дискретный анализ. — 1966. — Вып. 6. — С. 9–34.
2. **Евстигнеев В.А.** Транспортная задача по времени.I. // Дискретный анализ. — 1968. — Вып. 13. — С. 3–20.
3. **Евстигнеев В.А.** Транспортная задача по времени. II. // Управляемые системы. — 1968. — Вып. 1. — С. 21–28.
4. **Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.** Толковый словарь по теории графов в информатике и программированию. — Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1999.
5. **Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.** Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
6. **Евстигнеев В.А.** Многополюсные транспортные сети // Дискретный анализ. — 1965. — Вып. 4. — С. 28–36.
7. **Евстигнеев В.А., Фридман В.В.** Транспортная задача с древовидным графом маршрутов // Моделирование в экономических исследованиях. — Новосибирск: Изд-во Наука, СО АН СССР, 1978. — С. 84–95.