**Л. С. Мельников, И. В. Петренко**

# ПУТЕВЫЕ ЯДРА И ДЛИНЫ ЦИКЛОВ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $G = (V, E)$ — конечный неориентированный граф. Число вершин в наиболее длинном пути графа $G$ будем обозначать через $\tau(G)$. Через $g(G)$ и $c(G)$ будем обозначать длину кратчайшего (т. е. *обхват* ) и длиннейшего циклов в $G$ соответственно. Через $C_n$ и $P_n$ будем обозначать цикл длины $n$ и путь с $n$ вершинами соответственно. В графе $G$ вершину $v \in V$ будем называть *$P_n$–терминальной вершиной* , если она является конечной вершиной пути $P_n$, но не является конечной для пути $P_{n+1}$ в $G$.

*Открытой окрестностью вершины* $v \in V(G)$ называется множество вершин $N(v) = \{u \in V(G) | (u, v) \in E(G)\}$. *Открытой окрестностью подмножества* $A \subset V(G)$ называется множество

$$N(A) = \bigcup_{a \in A} N(a),$$

а *замкнутой окрестностью* множества $A$ называется множество $N[A] = N(A) \cup A$. Подграф графа $G$, порожденный множеством $S$, будем обозначать через $G[S]$.

Введем следующие определения.

**Определение 1.** *Для произвольного графа $G$ подмножество $K \subseteq V(G)$ называется $P_n$–ядром графа $G$, если $\tau(G[K]) \leq n - 1$ и каждая вершина $v \in V(G - K)$ смежна с $P_{n-1}$–терминальной вершиной из $G[K]$.*

Отметим, что максимальное независимое множество вершин образует $P_2$–ядро, а вершины максимального подграфа, не содержащего $P_3$, образуют $P_3$–ядро.

*Исследование первого автора поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 02-01-00039 и 00-07-90296), INTAS 97-1001 и Министерством образования РФ. Исследование второго автора поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-01-00581).

**Определение 2.** *Для произвольного графа $G$ подмножество $S \subseteq V(G)$ называется $P_n$–полуядром графа $G$, если $\tau(G[S]) \leq n-1$ и каждая вершина $v \in N(S) - S$ смежна с $P_{n-1}$–терминальной вершиной графа $G[S]$.*

Наиболее активно путевые ядра используются в связи с задачей о так называемом путевом разбиении произвольного графа. Пусть $a, b$ — натуральные числа такие, что $a+b = \tau(G)$. Разбиение $\{A, B\}$ множества $V(G)$ называется $(a, b)$–*разбиением*, если $\tau(G[A]) \leq a$ и $\tau(G[B]) \leq b$. Если в графе $G$ имеется $(a, b)$–разбиение для любой пары чисел $(a, b)$ такой, что $a + b = \tau(G)$, то граф $G$ называется $\tau$–*разбиваемым.*

Известно, что наличие $P_n$–ядра в графе $G$ означает, что $G$ является $(\tau(G) - n + 1, n - 1)$–разбиваемым.

В [1] была высказана гипотеза о том, что произвольный граф $G$ является $\tau$–разбиваемым. Эта гипотеза также тесно связана с открытой проблемой Михока [11] о ядрах и нашла отражение в диссертациях [8] и [13]. Краткое описание рассматриваемых задач и их связь с отмеченной выше гипотезой имеется в [5]. Версия этой гипотезы для ориентированных графов имеется в [9].

Путевые разбиения в свою очередь тесно связаны с так называемым $k$-*хроматическим числом* $\chi_k(G)$ графа $G$, которое равно наименьшему количеству множеств $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, на которые разбивается $V(G)$ таким образом, что $\tau(G[V_i]) \leq k$ для каждого $i$. Оно было введено в [6], где также была получена верхняя оценка для $k$-хроматического числа произвольного графа: $\chi_k(G) \leq \lfloor(\tau(G) - 1 - k)/2\rfloor + 2$. Если гипотеза о $\tau$–разбиваемости произвольного графа верна, то эта оценка может быть улучшена до $\chi_k(G) \leq \lceil\tau(G)/k\rceil$.

В [7] доказано, что если любой граф $G$ из некоторого наследственного класса $\mathcal{H}$ имеет $P_n$–полуядро, то любой граф из $\mathcal{H}$ имеет $P_n$–ядро. Таким образом, утверждения о существовании в произвольном графе $P_n$–ядра и $P_n$–полуядра равносильны. Там же получены результаты о том, что если $C$ является $(n-1)$–циклом в графе $G$, то $C$ является $P_n$–полуядром графа $G$, а также, что если $G$ — такой граф, что $g(G) \geq n-2$, то в $G$ существует $P_n$–ядро.

Практический интерес представляет собой проблема о существовании $P_n$–ядра в произвольном графе. Однако решения этой проблемы в общем виде пока не получены, а доказательства для малых значений $n$ имеют переборный характер и очень трудоемки. В [14] доказано, что в любом графе содержится $P_8$–ядро, причем методика доказательства указывает на тесную взаимосвязь путевых ядер и длин циклов в неориентированных графах.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ $P_{N+2}$–ЯДРА В ГРАФЕ С МАКСИМАЛЬНЫМ ЦИКЛОМ ДЛИНЫ $N$

Пусть $G$ – конечный неориентированный граф и в нем имеется цикл $C_n$ (т.е. цикл на $n$ вершинах), причем $n = c(G)$. Исходя из утверждений, приведенных выше, для того, чтобы доказать, что в графе $G$ имеется $P_{n+2}$–ядро, нам достаточно показать, что в графе $G$ имеется $P_{n+2}$–полуядро.

Рассмотрим алгоритм $\mathcal{A}$, при помощи которого осуществляется построение $P_{n+2}$–ядра в данном графе $G$. Положим $S = C_n$.

**Алгоритм $\mathcal{A}$.** На начальном этапе для подмножеств $A$ и $B$ множества вершин $V$ графа $G$ положим $A = \emptyset$, $B = V(G) \setminus S$.

**Шаг 1.** Все вершины из $B$ смежные с $P_{n+1}$–терминальными вершинами из множества $S$ переместим в множество $A$. Если $N(S) \cap B = \emptyset$, то алгоритм завершает работу. В противном случае выполняется шаг 2.

**Шаг 2.** Если в множестве $B$ имеется вершина $b$ смежная с вершинами $x$ и $y$ из множества $S$, то вершина $b$ перемещается в $S$, после чего выполняется шаг 1. В противном случае выполняется шаг 3.

**Шаг 3.** Если вершина $x$ из $S$ является $P_n$–терминальной и имеется вершина $b$ из множества $B$, смежная с вершиной $x$, то вершина $b$ перемещается в множество $S$, после чего выполняется шаг 1.

Все вершины множества $S$ в начале работы алгоритма являются $P_n$–терминальными. Когда алгоритм завершит работу (т.е. когда множество $N(S) \cap B$ окажется пустым), множество $S$ будет обладать свойствами $P_{n+2}$–ядра графа $G$. Каждая вершина из множества $A$ будет смежна с $P_{n+1}$–терминальной вершиной из множества $S$. Таким образом, чтобы доказать, что $S$ является $P_{n+2}$–ядром графа $G$, достаточно убедиться в том, что $\tau(S) \leq n+1$.

Легко видеть, что путь длины большей, чем $n+1$, в множестве $S$ может возникнуть только при перемещении вершин из множества $B$ в множество $S$. При выполнении шага 3 путь длины $n+2$ и более возникнуть не может, так как шаг 3 выполняется тогда и только тогда, когда в множестве $B$ не имеется вершин, смежных более, чем с одной вершиной из $S$. Следовательно, достаточно убедиться в том, что путь длины $n+2$ и более не возникнет при выполнении шага 2 алгоритма $\mathcal{A}$.

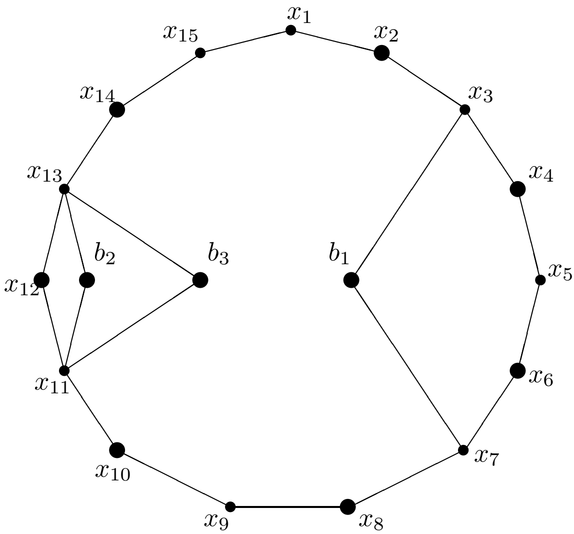


*Рис. 1.* $c(G) = n = 15$. Согласно лемме 2.1 вершины $x_2, x_4, x_6, x_8, b_1$, а также $x_{10}, x_{12}, x_{14}, b_2, b_3$ являются $P_n$–терминальными. Вершины $b_2$ и $b_3$ *дублируют друг друга*

**Лемма 2.1.** *Пусть $G$ — граф, удовлетворяющий вышеперечисленным условиям, $S$ – подграф графа $G$, в котором содержится $C_n$. Предположим, при выполнении шага 2 алгоритма $\mathcal{A}$ в множество $S$ перемещена вершина $b$, смежная с вершинами $x_i$ и $x_j$ из множества $S$. Тогда вершины $x_{i-1}, x_{i+1}, x_{j-1}, x_{j+1}$, а также вершина $b$ являются $P_{n+1}$–терминальными в подграфе $S \cup \{b\}$.*

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можем предположить, что $1 < i < j < n$. Отметим также, что равенство $i + 1 = j$ не может выполняться ввиду предположения о том, что $n = c(G)$, т.е. $n$ — длина наибольшего цикла в графе $G$. Вершины $x_i$ и $x_j$ являются $P_n$–терминальными в $S$. После перемещения вершины $b$ в множество $S$ получим, что в $S$ возникли пути $P_1, P_2, P_3, P_4$ следующего вида:

$$P_1 = b, x_i, x_{i-1}, \dots, x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{i+1},$$

$$P_2 = b, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1},$$

$$P_3 = b, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, \dots, x_{j+1},$$

$$P_4 = b, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1},$$

длина каждого из этих путей равна $n+1$, и, следовательно, вершины $x_{i-1}, x_{i+1}, x_{j-1}, x_{j+1}$, а также вершина $b$ являются $P_{n+1}$–терминальными в подграфе $S \cup \{b\}$. Лемма доказана.

Отметим, что, вообще говоря, возможно равенство $x_{i+1} = x_{j-1}$, и в этом случае лемма также справедлива (см. рис. 2, $x_i = x_{11}, x_j = x_{13}$).

Доказанная лемма позволяет сделать вывод о том, что после перемещения в множество $S$ вершины $b$ из множества $B$ на шаге 2 при последующем *обязательном* выполнении шага 1 все вершины из $B$ смежные с $P_{n+1}$ – терминальными вершинами из $S$, будут перемещены в множество $A$.

В случае, если при двукратном выполнении шага 2 алгоритма $\mathcal{A}$ в множество $S$ будут перемещены вершины $b_1$ и $b_2$, каждая из которых смежна с вершинами $x_i$ и $x_j$ из множества $S$, вершины $x_{i-1}, x_{i+1}, x_{j-1}, x_{j+1}$, $b_1, b_2$ являются $P_{n+1}$–терминальными в подграфе $S \cup \{b_1, b_2\}$. Такие вершины называются *дублирующими* друг друга, или *дубликатами*. На рис. 2 такими вершинами являются $b_2$ и $b_3$. Легко видеть, что перемещение в множество $S$ в ходе работы алгоритма вершин, дублирующих друг друга, не оказывает влияния на $\tau(S)$. Действительно, поскольку путь максимальной длины в $S \cup \{b_1, b_2\}$ не может проходить через одну вершину более одного раза, то длина пути проходящего через вершины $b_1$ и $b_2$, дублирующие друг друга, не может превышать $n+1$. Это наблюдение может быть сформулировано в виде следующего утверждения.

**Утверждение 2.2.** *Пусть $G$ — граф, удовлетворяющий вышеперечисленным условиям, $S$ – подграф графа $G$, в котором содержится $C_n$. Пусть при многократном выполнении шага 2 алгоритма $\mathcal{A}$ в множество $S$ перемещаются вершины $b_1, \dots, b_l$, смежные с вершинами $x_i$ и $x_j$ из множества $S$ и дублирующие друг друга. Тогда при перемещении вершин $b_2, \dots, b_l$ в множество $S \cup \{b_1\}$ длина наибольшего пути в $S$ не изменится.*

Это утверждение позволяет нам в дальнейшем не рассматривать вершины, дублирующие друг друга, считая их тождественными, что в свою очередь несколько упрощает доказательство следующей теоремы.

**Теорема 2.3.** *Пусть $G$ — граф, удовлетворяющий вышеперечисленным условиям, $n = c(G)$, тогда в графе $G$ имеется $P_{n+2}$–ядро.*

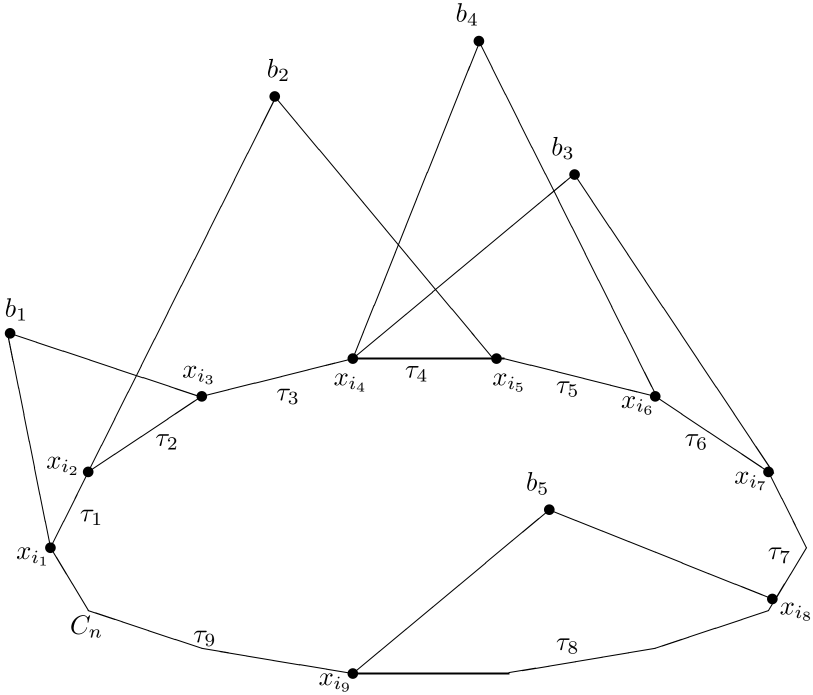


*Рис. 2.* Иллюстрация к доказательству теоремы 2.3, случай $k = 5, t = 9$

**Доказательство.** Как уже отмечалось выше, для доказательства теоремы достаточно показать, что при многократном выполнении шага 2 алгоритма $\mathcal{A}$ в $S$ не образуется путь длины $n + 2$. Поскольку вершины, перемещенные в $S$ при выполнении шага 3, путь такой длины порождать не могут, предполагаем, что при выполнении шага 3 ни одна вершина из $B$ не была перемещена в множество $S$.

Пусть $S$ — подграф графа $G$, в котором содержится $C_n$. Предположим, в процессе работы алгоритма $\mathcal{A}$ в множество $S$ были перемещены вершины $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Предположим также, что никакие две из этих вершин не являются дублирующими друг друга. Множество этих вершин обозначим через $W$.

В множестве $N(W) \cap S$ содержится $t$ вершин цикла $C_n$. Обозначим их $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}$. Легко видеть, что при удалении этих вершин цикл $C_n$

распадается на $t$ цепей $p_1, p_2, \ldots, p_t$, где $t \leq 2k$, причем длина каждой из этих цепей $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_t$ соответственно. В силу леммы 2.1 $\tau_i \geq 1$, где $i = 1, \ldots, t$.

Пусть $P$ — путь, который проходит через каждую из вершин множества $W$ и имеет наибольшую длину в $S$. Поскольку $P$ — простой путь и проходит через каждую из содержащихся в нем вершин в точности один раз, его длина может быть легко подсчитана:

$$\tau(P) = \sum_{i \in I} \tau_i + t + k,$$

где $I \subseteq \{1, 2, \ldots, t\}$, причем $i \in I$ тогда и только тогда, когда путь $P$ проходит через вершины цепи $p_i$. Нетрудно видеть, что $|I| \leq t - k + 1$.

Через $J$ обозначим множество $\{1, 2, \ldots, t\} \setminus I$, т. е. множество номеров цепей $p_1, p_2, \ldots, p_t$, через вершины которых путь $P$ не проходит. Отметим, что $|J| \geq k - 1$.

Поскольку имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i + t = n,$$

которое можно также записать в виде

$$\sum_{i \in I} \tau_i + \sum_{j \in J} \tau_j + t = n,$$

имеем

$$\sum_{i \in I} \tau_i = n - \sum_{j \in J} \tau_j - t.$$

Тогда длина пути $P$ может быть подсчитана следующим образом:

$$\tau(P) = \sum_{i \in I} \tau_i + k + t = n - \sum_{j \in J} \tau_j + k.$$

Поскольку $\tau_i \geq 1$, где $i = 1, 2, \ldots, t$, а также $|J| \geq k - 1$ получим:

$$\tau(P) = n - \sum_{j \in J} \tau_j + k \leq n - (k - 1) + k = n + 1,$$

что и требовалось доказать.

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы считают необходимым отметить, что примененная в настоящей статье техника может быть использована также для доказательства того, что *если в неориентированном графе $G$ имеется цикл $C_n$ и $n = c(G) \leq 7$, то в $G$ имеется $P_{n+3}$–ядро* . Доказательство это, однако, чрезмерно громоздкое и трудоемкое из-за своего переборного характера. В связи с этим авторы позволили себе ограничиться здесь лишь некоторыми соображениями, не приводя доказательства полностью.

Техника его в целом аналогична применяемой в настоящей статье, необходимо лишь слегка модифицировать алгоритм $\mathcal{A}$, который примет при этом следующий вид.

На начальном этапе для подмножеств $A$ и $B$ множества вершин $V$ графа $G$ положим $A = \emptyset$, $B = V(G) \setminus V(S)$.

**Шаг 1.** Все вершины из $B$, смежные с $P_{n+2}$–терминальными вершинами из множества $S$, переместим в множество $A$. Если $N(S) \cap B = \emptyset$, то алгоритм завершает работу. В противном случае выполняется шаг 2.

**Шаг 2.** Если в множестве $B$ имеется вершина $b$, смежная с вершинами $x$ и $y$ из множества $S$, то вершина $b$ перемещается в $S$, после чего выполняется шаг 1. В противном случае выполняется шаг 3.

**Шаг 3.** Если вершина $x$ из $S$ является $P_{n+1}$–терминальной и имеется вершина $b$ из множества $B$, смежная с вершиной $x$, то вершина $b$ перемещается в множество $S$, после чего выполняется шаг 1. Иначе выполняется шаг 4.

**Шаг 4.** Если вершина $x$ из $S$ является $P_n$–терминальной и имеется вершина $b$ из множества $B$, смежная с вершиной $x$, то вершина $b$ перемещается в множество $S$, после чего выполняется шаг 1. В противном случае выполняется шаг 2.

Исследуя работу этого алгоритма на всех возможных подграфах $S$ графа $G$, содержащих $C_n$ с $\tau(S) \leq n + 2$ (а таких подграфов в случае $n = 7$ окажется 16), получим доказательство.

Ограничение на значение $n = c(G)$ в известной степени условно. Доказать существование $P_n$–ядра для больших значений $n$, используя этот метод, также представляется возможным. Однако число рассматриваемых подграфов с ростом $n$ возрастает очень стремительно, в связи с чем использование данной методики неэффективно. К тому же выводу нас приводит и то, что в случае, когда $n = 15$, в процессе работы алгоритма в множество $S$ могут быть добавлены вершины $b_1, b_2, b_3$ из

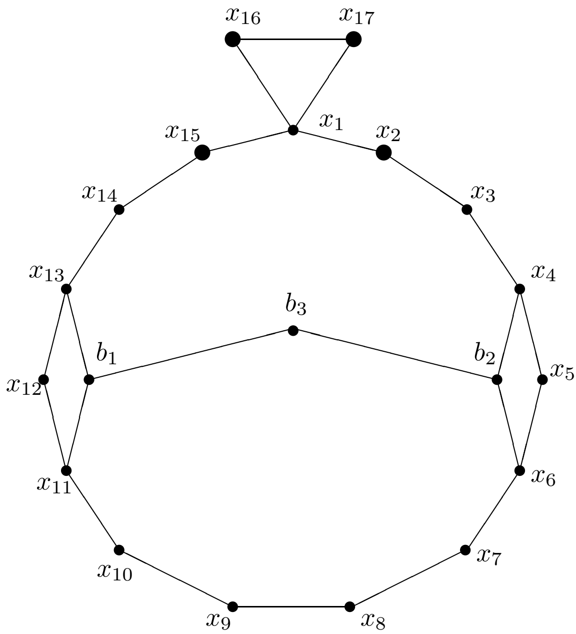


*Рис. 3.* В $S$ имеется путь длины 18

множества $B$, при этом в $S$ образуется путь длины 18, в то время как для существования $P_{n+3}$–ядра (в данном случае — $P_{18}$–ядра) необходимо выполнение неравенства $\tau(S) \leq 17$. Эта ситуация изображена на рис. 3.

Изложенные в предыдущем абзаце рассуждения не позволяют построить пример неориентированного графа, не имеющего путевого ядра. Более того, предположение о существовании такого графа представляется неправдоподобным.

Авторы полагают, что возможности использованного метода построения путевого ядра в неориентированном графе $G$ на этом исчерпываются, допуская однако, что некоторая дополнительная модификация алгоритма $\mathcal{A}$ за счет структурирования шага 2 позволит доказать утверждение о существовании $P_{n+3}$–ядра в неориентированном графе $G$ с циклом максимальной длины $n$ и для значений $n > 7$. Следует ожидать, что трудоемкость доказательства при этом многократно возрастет за счет необходимости перебора множества дополнительных «подшагов» шага 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihók P., Semanišin G.** A survey of hereditary properties of graphs // Discuss. Math. Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 1. — P. 5–50.
2. **Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M.** A path(ological) partition problem // Discuss. Math. Graph Theory. — 1998. — Vol. 18, № 1. — P. 113–125.
3. **Broere I., Dorfling M.** The decomposibility of additive of hereditary properties of graphs // Discuss. Math. Graph Theory. — 2000. — Vol. 20, N 2. — P. 281–291.
4. **Broere I, Frick M., Semanišin G.** Maximal graphs with respect to hereditary properties // Discuss. Math. Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 1. — P. 51–66.
5. **Broere I., Hajnal P., Mihók P.**. Partition problems and kernels of graphs // Discuss. Math. Graph Theory. — 1997. — Vol.17, N 2. — P. 51-56.
6. **Chartrand G., Geller D. P., Hedetniemi S. T.**, A generalization of the chromatic number // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1968. — Vol. 64, N 2. — P. 265–271.
7. **Dunbar J. E., Frick M.** Path kernels and partitions // J. Combin. Math. Combin. Comput. — 1999. — Vol. 31. — P. 137–149.
8. **Hajnal P.** Graph partitions (на венгерском): Ph. D. Thesis. — Szeged Attila József University, 1984.
9. **Laborde J. M., Payan C., Xuong N. H.** Independent sets and longest directed paths in digraphs // Graphs and other combinatorial topics (Prague, 1982). — Leipzig: Teubner, 1983. — P. 173–177.
10. **Lovász L.** On decomposition of graphs // Studia Sci. Math. Hungar. — 1966. — Vol. 1, N 1–2. — P. 237–238.
11. **Mihók P.** Problem 4. Graphs, hypergraphs and matroids. — Zielona Góra: Higher College Engrg., 1985. — 86 p.
12. **Stiebitz M.** Decomposing graphs under degree constraints // J. Graph Theory. — 1996. — Vol. 23, N 3. — P. 321–324.
13. **Vronka J.** Vertex sets of graphs with prescribed properties (на словацком): Ph. D. Thesis. — Košice, Šafárik University, 1986.
14. **Мельников Л.С., Петренко И.В.** Путевые ядра и разбиения в неориентированных графах //Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. — 2002. — Т.9, № 2. — С. 21–35.