А. А. Добрынин, Л. С. Мельников*, Х. Вальтер, Й. Шрейер

ЧИСЛО КОСЫХ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ГРАФОВ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

Рассматриваются полиэдральные графы (графы полиэдров), т. е. плоские 3-связные графы. Грань размера k полиэдрального графа имеет тип $\langle a_1, a_2, ..., a_k \rangle$, если инцидентные этой грани вершины, обходимые в циклическом порядке, имеют степени $a_1, a_2, ..., a_k$, и этот набор является лексикографически минимальным среди всех подобных наборов. Если в полиэдральном графе все грани имеют разные типы, то такой граф называется косым (oblique). Для полиэдральных графов с числом вершин не более 12 найдены количества косых графов, в том числе с дополнительными свойствами.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются полиэдральные графы (графы полиэдров), т. е. плоские 3-связные графы $G = G(V, E, F)$ с множеством вершин $V = V(G)$, множеством ребер $E = E(G)$ и множеством граней $F = F(G)$. Хорошо известно, что плоские 3-связные графы имеют комбинаторно единственную укладку на плоскости. Число ребер (или граней), инцидентных вершине v, называется степенью v. Число l ребер (или число вершин), инцидентных грани $\alpha \in F$, называется степенью α. Грань α будет также называться l-гранью или l-угольником. Грани $\alpha \in F(G)$ поставим в соответствие последовательность $\langle a_1, a_2, ..., a_l \rangle$, если α является l-угольником и степени инцидентных грани α вершин равны $a_1, a_2, ..., a_l$ при некотором обходе вершин грани в циклическом порядке. Лексикографический минимум среди всех таких последовательностей называется типом грани α. Например, для треугольной грани α типа $\langle a, b, c \rangle$ выполняется $a \leq b \leq c$.

Полиэдральный граф G называется *косым* (*oblique*), если все его грани имеют разные типы. Косой граф называется *двойным косым*, ес-

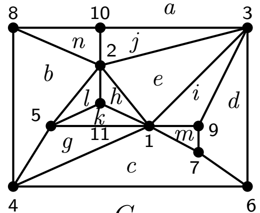
* `omeln@math.nsc.ru`

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05–01–00395 и 05–01–00816).

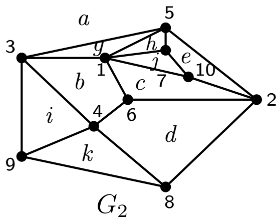
ли его геометрически двойственный граф также является косым. Ясно, что двойные косые графы содержат все косые самодвойственные полиэдральные графы. Граф G называется *суперкосым*, если G и его двойственный граф являются косыми и эти графы не имеют граней совпадающих типов. Пусть $k \geq 1$ — натуральное число. Полиэдральный граф G является *k–косым*, если множество граней $F(G)$ содержит не более k граней одинакового типа независимо от типа. Очевидно, 1-косой граф является косым, и наоборот. Полиэдральный граф называется *триангуляцией*, если все его грани являются треугольными. Б. Грюнбаум и С. Шефард [3] перечислили все гране-транзитивные полиэдральные графы. Ясно, что такие графы имеют грани только одного типа. Х. Вальтер показал [5], что множество косых триангуляций конечно и любая косая триангуляция содержит вершину степени 3. В [4] доказано, что для любого k множество k-косых графов конечно. Из результата О. Бородина [1] следует, что любой косой граф всегда содержит вершину степени 3 или 4.

В [2] получены следующие результаты: любой косой граф состоит не менее, чем из 8 граней и содержит вершину степени 3 (два графа на 10 вершинах имеют точно 8 граней); существуют как самодвойственные косые графы, так и суперкосые графы; любая косая триангуляция содержит не менее 6 вершин с попарно разными степенями; любая косая триангуляция состоит из не менее, чем 16 граней (16 граней имеет единственная триангуляция).

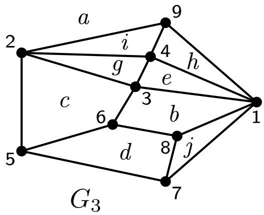
Назовем типом вершины плоского графа лексикографически минимальную последовательность размеров инцидентных ей граней при их циклическом обходе. Очевидно, что набор типов вершин полиэдрального графа совпадает с набором типов граней его двойственного графа. На рис. 1. приводятся примеры суперкосого графа G_1, двойного косого графа G_2 (не самодвойственного) и двойного косого самодвойственного графа G_3. Для графов перечислены типы всех граней и вершин. Грани графа обозначены буквами, а вершины занумерованы числами.



G_1



G_2



G_3

f	степени вершин				
a	3	3	4	3	5
b	3	4	4	6	
c	3	3	4	7	
d	3	3	3	5	
e	5	6	7		
g	4	4	7		
h	3	6	7		
i	3	5	7		
j	3	5	6		
k	3	4	7		
l	3	4	6		
m	3	3	7		
n	3	3	6		

f	степени вершин				
a	3	3	4	4	4
b	3	4	4	5	
c	3	4	3	5	
d	3	4	3	4	
e	3	3	4	4	
g	4	4	5		
h	3	4	5		
i	3	4	4		
j	3	3	5		
k	3	3	4		

f	степени вершин				
a	3	3	4	3	5
b	3	3	4	5	
c	3	3	4	4	
d	3	3	3	3	
e	4	4	5		
g	4	4	4		
h	3	4	5		
i	3	4	4		
j	3	3	5		

v	размеры граней						
1	3	3	3	3	3	3	4
2	3	3	3	3	3	4	
3	3	3	3	4	5		
4	3	4	5	4			
5	3	3	3	4			
6	4	4	5				
7	3	4	4				
8	3	4	5				
9	3	3	4				
10	3	3	5				
11	3	3	3				

v	размеры граней				
1	3	3	3	4	4
2	4	4	4	5	
3	3	4	3	5	
4	3	3	4	4	
5	3	3	4	5	
6	4	4	4		
7	3	4	4		
8	3	4	5		
9	3	3	5		
10	3	3	4		

v	размеры граней				
1	3	3	4	3	5
2	3	3	4	5	
3	3	3	4	4	
4	3	3	3	3	
5	4	4	5		
6	4	4	4		
7	3	4	5		
8	3	4	4		
9	3	3	5		

Рис. 1. Суперкосой, двойной косой и самодополнительный косой графы

1. ЧИСЛО КОСЫХ ГРАФОВ

Ясно, что косые графы являются асимметричными, т. е. имеют тривиальную группу автоморфизмов. Поэтому далее рассматриваются только асимметричные полиэдральные графы. Нас будут интересовать количества косых графов с дополнительными свойствами.

Обозначим через DO (Double Oblique) класс всех двойных косых графов. В этом классе выделим следующие непересекающиеся подмножества: SO (Super Oblique) — множество суперкосых графов (см. граф G_1 на рис. 1), EO (Equal Oblique) — множество не самодвойственных графов, для которых *размеры граней* графа и его двойственного графа совпадают (см. граф G_2 на рис. 1) и SD (Self Dual oblique) — множество самодвойственных графов (см. граф G_3 на рис. 1).

Данные о количестве косых полиэдральных графах с числом вершин не более 12 из указанных множеств приводятся в таблице 1. В клетке таблицы над горизонтальной чертой указаны количества всех полиэдральных графов и асимметричных полиэдральных графов, разделенные наклонной чертой. Под горизонтальной чертой первое число есть количество косых графов. Далее после наклонной черты указано число $|DO|$ двойных косых графов, если они существуют. Для таких графов через запятую перечисляются число $|SO|$ суперкосых графов, число $|EO|$ графов с одинаковыми наборами размеров граней и число $|SD|$ самодвойственных косых графов. Если информация об этих множествах не указывается, то они являются пустыми, а на соответствующем месте таблицы при необходимости указывается ноль.

Утверждение 1. *Множество всех полиэдральных графов с числом граней $f \leq 20$ и числом вершин $v \leq 12$ содержит 80312 косых графов, 1447 двойных косых графов (DO), 50 суперкосых графов (SO), 90 косых графов с одинаковыми наборами размеров граней (EO) и 58 самодвойственных косых графов (SD).*

В ходе компьютерного поиска проверялись дополнительные свойства графов. Так, в косых графах всегда присутствовала вершина степени 4. Среди косых графов встречались такие, у которых: нет 5- и 6-граней; нет вершин степени 5 и 6; нет 6-граней и вершин степени 6; присутствует одна 4-грань и нет 5- и 6-граней. Множество косых триангуляций с не более, чем 22 гранями состоит из 66 графов (1, 3, 13 и 49 триангуляций с 16, 18, 20 и 22 гранями соответственно). Существуют неизоморфные косые самодвойственные графы с полностью совпадающими наборами типов граней.

Таблица 1

Количество всех полиэдральных графов и асимметричных полиэдральных графов (над чертой), количество косых и двойных косых графов (под чертой). Через запятые указано число графов для непустых множеств SO, EO и SD (f — грани, v – вершины).

	$4\ v$	$5\ v$	$6\ v$	$7\ v$	$8\ v$	$9\ v$	$10\ v$	$11\ v$	$12\ v$
$4\ f$	$\frac{1/0}{0}$								
$5\ f$		$\frac{1/0}{0}$	$\frac{1/0}{0}$						
$6\ f$		$\frac{1/0}{0}$	$\frac{2/0}{0}$	$\frac{2/0}{0}$	$\frac{2/0}{0}$				
$7\ f$			$\frac{2/0}{0}$	$\frac{8/2}{0}$	$\frac{11/3}{0}$	$\frac{8/2}{0}$	$\frac{15/0}{0}$		
$8\ f$			$\frac{2/0}{0}$	$\frac{11/3}{0}$	$\frac{42/22}{0}$	$\frac{74/48}{0}$	$\frac{76/44}{2}$	$\frac{38/21}{0}$	$\frac{14/2}{0}$
$9\ f$				$\frac{8/2}{0}$	$\frac{74/48}{1}$	$\frac{296/237}{12/3/0,0,3}$	$\frac{633/533}{26/1}$	$\frac{768/662}{27}$	$\frac{558/449}{6}$
$10\ f$				$\frac{5/0}{0}$	$\frac{76/44}{0}$	$\frac{633/533}{10/1}$	$\frac{2635/2401}{77/3/0,2,1}$	$\frac{6134/5790}{250/2}$	$\frac{8822/8331}{370/2}$
$11\ f$					$\frac{38/21}{0}$	$\frac{768/662}{9}$	$\frac{6134/5790}{139/2}$	$\frac{25626/24888}{759/24/0,6,8}$	$\frac{64439/63080}{2161/38}$
$12\ f$					$\frac{14/2}{0}$	$\frac{558/449}{4}$	$\frac{8822/8331}{107/2}$	$\frac{64439/63080}{1618/38}$	$\frac{268394/265253}{8496/190/0,82,46}$
$13\ f$						$\frac{219/164}{1}$	$\frac{7916/7491}{57}$	$\frac{104213/102524}{1520/32/1}$	$\frac{709302/704267}{16318/313}$
$14\ f$						$\frac{50/16}{0}$	$\frac{4442/4052}{15}$	$\frac{112082/110015}{1084/19/3}$	$\frac{1263032/1255238}{18925/321/2}$
$15\ f$							$\frac{1404/1235}{3}$	$\frac{79773/78169}{409/8/4}$	$\frac{1556952/1548735}{15907/344/19}$
$16\ f$							$\frac{233/137}{1}$	$\frac{36528/35199}{121}$	$\frac{1338853/1329899}{7842/103/19}$
$17\ f$								$\frac{9714/9176}{29}$	$\frac{789749/783543}{3006/2/2}$
$18\ f$								$\frac{1249/970}{3}$	$\frac{306470/301763}{874}$
$19\ f$									$\frac{70454/68697}{111}$
$20\ f$									$\frac{7595/6756}{13}$

Таблица 2

Распределение асимметричных полиэдральных графов по максимальному числу s граней совпадающего типа (f — грани; число вершин не более 12)

$s \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7 f	–	1	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8 f	2	85	47	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–
9 f	72	1068	666	114	11	–	–	–	–	–	–	–	–
10 f	707	9553	5595	1088	139	17	–	–	–	–	–	–	–
11 f	3068	52293	30228	7140	1483	218	11	–	–	–	–	–	–
12 f	10225	167447	114166	35550	8172	1375	171	9	–	–	–	–	–
13 f	17895	367424	292458	102201	27022	6128	1171	139	8	–	–	–	–
14 f	20024	556122	524947	198555	53450	13028	2646	474	72	3	–	–	–
15 f	16319	594693	653579	263836	75050	19224	4310	908	167	44	9	–	–
16 f	7964	449573	567342	242990	70207	20146	5236	1362	335	73	7	–	–
17 f	3035	238113	333591	150477	46763	14992	4217	1121	298	85	20	6	1
18 f	877	82369	129416	60951	19392	6832	1985	647	186	65	10	3	–
19 f	111	17249	29324	14542	4870	1793	529	188	62	22	4	2	1
20 f	13	1610	2986	1443	469	179	45	9	2	–	–	–	–
всего	80312	2537600	2684351	1078893	307028	83932	20321	4857	1130	292	50	11	2

2. БЛИЗОСТЬ АСИММЕТРИЧНЫХ ГРАФОВ К КОСЫМ ГРАФАМ

Как можно описать близость других асимметричных полиэдральных графов к косым графам? Будем характеризовать такую близость двумя антиподальными величинами. Пусть число граней f фиксированно. Первая величина s есть максимальное число граней графа одинакового типа, вторая — число u различающихся типов граней графа. В частности, для косого графа $u = f$ и $s = 1$. Ясно, что $s + u - 1 \leq f$, где равенство достигается на косых графах и графах с $s = f$.

В таблице 2 приведено распределение асимметричных графов по величине s. Первый столбец таблицы содержит количества косых графов. Существуют ли асимметричные полиэдральные графы для которых выполняется $s = f$ (или $u = 1$)? Ответ на этот вопрос будет отрицательным, так как в [5] показано, что кроме гране-транзитивных полиэдральных графов существует в точности один полиэдральный граф с единственным типом граней, который, однако, имеет симметрии.

Таблица 3

Распределение асимметричных полиэдральных графов по числу u различающихся типов граней (f — грани; число вершин не более 12)

$u \to$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7 f	–	–	3	4	–	–	–	–	–
8 f	–	1	35	61	41	2	–	–	–
9 f	–	16	167	593	718	365	72	–	–
10 f	2	23	360	2082	5035	5695	3195	707	–
11 f	4	62	682	4062	13723	27166	29512	16162	3068
12 f	11	82	891	5745	23047	62421	98864	89573	46256
13 f	2	56	878	6341	30866	90149	171051	222578	185283
14 f	3	38	760	5970	28039	91016	199421	313438	347380
15 f	1	83	520	4229	21232	68020	159824	290254	385318
16 f	6	74	311	2743	11879	37709	95595	188683	270740
17 f	2	24	232	1364	5381	17073	43568	83114	123853
18 f	–	14	88	522	2063	5595	13069	24274	37581
19 f	–	1	19	165	483	1339	2592	4256	7005
20 f	–	–	1	17	40	64	162	323	603
всего	31	474	4947	33898	142547	406614	816925	1233362	1407087

$u \to$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
7 f	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8 f	–	–	–	–	–	–	–	–	–
9 f	–	–	–	–	–	–	–	–	–
10 f	–	–	–	–	–	–	–	–	–
11 f	–	–	–	–	–	–	–	–	–
12 f	10225	–	–	–	–	–	–	–	–
13 f	89346	17896	–	–	–	–	–	–	–
14 f	254762	108470	20024	–	–	–	–	–	–
15 f	363195	228808	90336	16319	–	–	–	–	–
16 f	297242	250791	148037	53461	7964	–	–	–	–
17 f	154657	157374	119568	63442	20032	3035	–	–	–
18 f	51598	58137	51292	34981	17220	5422	877	–	–
19 f	9978	11603	11485	9646	6418	2827	769	111	–
20 f	814	1028	1038	1039	851	494	209	60	13
всего	1231817	834107	441780	178888	52485	11778	1855	171	13

Как видно из таблицы 2 лучшее приближение величины s к числу граней f дает граф с $f = 17$ гранями, из которых $s = 13$ граней одного типа.

Количество k–косых полиэдральных графов с f гранями получается суммированием чисел в столбцах 1, 2, ..., k в соответствующей строке таблицы 2.

В таблице 3 представлено распределение асимметричных графов по количеству u различающихся типов граней. Числа косых графов образуют верхнюю огибающую непустых элементов таблицы. Оказалось, что не существует асимметричных полиэдральных графов с числом вершин не более 12, которые имели бы два типа граней ($u = 2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Borodin O.** Structural properties of planar maps with the minimum degree 5 // Math. Nachr. — 1992. — Vol. 158. — P. 109–117.
2. **Dobrynin A. A., Mel'nikov L. S., Schreyer J., Walther H.** Some news about oblique graphs // Discuss. Math. Graph Theory. — 2002. — Vol. 22, N 1. — P. 39–50.
3. **Grünbaum B., Shephard G. C.** Spherical tilings with transitivity properties // The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift. — Springer–Verlag, 1982. — P. 65–98.
4. **Voigt M., Walther H.** Polyhedral graphs with restricted number of faces of the same type // Discrete Math. — 2002. — Vol. 244, N 1–3. — P. 473–478.
5. **Walther H.** Polyhedral graphs with extreme numbers of types of faces // Discrete Appl. Math. — 2002. — Vol. 120, N 1–3. — P. 263–274.