Л. С. Мельников*, И. В. Петренко

ПУТЕВЫЕ РАЗБИЕНИЯ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Количество вершин в наиболее длинном простом пути графа G обозначается $\tau(G)$. Подмножество S множества вершин $V(G)$ называется P_{n+1}*-свободным множеством* в G, если $\tau(G[S]) \leq n$. P_{n+1}-свободное множество максимального порядка в графе G называется *максимальным* P_{n+1}*-свободным множеством* графа G.

Известна гипотеза о том, что для любых G-графа и $n < \frac{\tau(G)}{2}$ существует P_{n+1}-свободное множество M в G, такое что $\tau(G - M) \leq \tau(G) - n$.

В настоящей работе приводится доказательство этой гипотезы для $n \leq 8$.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе речь пойдет о конечных неориентированных графах.

Записью P_n мы будем обозначать путь порядка n, т. е. путь, содержащий n вершин. Соответственно, через C_n будет обозначаться цикл на n вершинах. Через $g(G)$ и $c(G)$ будем обозначать длину кратчайшего *(обхват)* и длиннейшего циклов в G соответственно. Количество вершин в наиболее длинном простом пути графа G обозначается $\tau(G)$.

Пусть S — некоторое подмножество множества вершин $V(G)$ графа G. Подграфом графа G, порожденным множеством S, называется граф $G[S]$, множество вершин которого $V(G[S]) = S$, а множество ребер $E(G[S]) = E(G) \cap S \times S$.

Открытой окрестностью вершины $v \in V(G)$ называется множество вершин вида $N(v) = \{u \in V(G) | (u, v) \in E(G)\}$. *Открытой окрестностью подмножества* A *множества вершин* $V(G)$ называется множество вершин вида $N(A) = \bigcup_{a \in A} N(a)$, а *замкнутой окрестностью* того же множества называется множество вершин вида $N[A] = N(A) \cup A$.

Пусть $G = (V, E)$ — конечный неориентированный простой граф. Для некоторой пары натуральных чисел (a, b) разбиение множества вершин $V(G)$ на два непересекающихся подмножества $\{A, B\}$ называется (a, b)*-разбиением* , если $\tau(G[A]) \leq a$, а $\tau(G[B]) \leq b$. Граф, для которого имеется такое (a, b)-разбиение, называется (a, b)*-разбиваемым.*

*omeln@math.nsc.ru

Работа автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-000395 и 05-01-00816).

Если G является (a, b)-разбиваемым для любых a и b таких, что имеет место равенство $a + b = \tau(G)$, то такой граф называется *τ-разбиваемым.*

В работе [12] Г. Чартрандом, Д.П. Геллером и С. Хедетниеми было введено так называемое *k-хроматическое число графа,* $\chi_k(G)$, которое определяется как наименьшее количество множеств $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, разбивающих множество $V(G)$ таким образом, что имеет место $\tau(G[V_i]) \leq k$ для каждого i. Там же для k-хроматического числа некоторого графа G была получена следующая верхняя оценка:

$$\chi_k(G) \leq \lfloor \frac{\tau(G) - 1 - k}{2} \rfloor + 2,$$

потенциально улучшаемая до $\chi_k(G) \leq \lceil \tau(G)/k \rceil$, в случае, если гипотеза о τ-разбиваемости произвольного графа G справедлива.

В дальнейшем k-раскраски изучались в работах [6, 10], а затем, уже в терминах путевых разбиений, в работах [8, 11], а также в последовавших за ними [9, 13].

В общем случае эта гипотеза может быть сформулирована в следующем виде.

Гипотеза 1. *Каждый граф является τ-разбиваемым.*

Гипотеза 1 тесно связана с открытой гипотезой Михока [20] о ядрах и работой Хайнала [16]. Эта гипотеза нашла отражение в диссертациях [17, 21]. Широкую известность гипотеза получила в 1997 г., будучи опубликована практически одновременно в работах [8, 11].

Вариант этой гипотезы для ориентированных графов сформулирован в [19], аналогичные постановки рассматривались в [18, 7]. В 2005 г. вышла работа [15], полностью посвященная версии гипотезы для ориентированных графов.

В связи с гипотезой 1 выдвигались различные метагипотезы, изучению которых посвящены, в частности, работы [13, 1, 2, 3, 4, 5].

Еще одна такая метагипотеза была предложена в работе [14]. Она использует понятие так называемого *P_n-свободного множества.* Подмножество S множества вершин $V(G)$ называется *P_{n+1}-свободным множеством* в G, если $\tau(G[S]) \leq n$. P_{n+1}-свободное множество максимального порядка в графе G называется *максимальным P_{n+1}-свободным множеством* графа G.

Гипотеза 2. *Для любых G-графа и $n < \frac{\tau(G)}{2}$ существует P_{n+1}-свободное множество S в G, такое что $\tau(G - S) \leq \tau(G) - n$.*

Легко видеть, что если гипотеза 2 справедлива для некоторого графа G, то и гипотеза 1 для него справедлива.

В работе [14] доказаны некоторые результаты в пользу гипотезы 2. Так, например доказано, что для некоторого графа G и максимального P_{n+1}-свободного множества M в графе G имеет место неравенство

$$\tau(G - M) \leq \tau(G) - \frac{2}{3}n.$$

Кроме того, приведено доказательство, что гипотеза 2 верна для $n = 5$.

В настоящей работе доказано, что гипотеза 2 справедлива для $n \leq 8$.

1. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

В любом графе имеется P_{n+1}-свободное множество. Если M — максимальное P_{n+1}-свободное множество графа G, тогда для каждой вершины x из подграфа $G - M$ имеет место одна из перечисленных ниже альтернатив.

1. В M имеется путь P порядка n такой, что x смежна с концевой вершиной P.
2. В M имеется пара непересекающихся путей P и Q, у каждого из которых концевая вершина смежна с x, причем $|V(P) \cup V(Q)| = n$.

Предположим теперь, что некоторый путь L является самым длинным путем, лежащим в $G - M$, т. е. $\tau(G) = |L|$. Если для x выполняется первый вариант, то в графе G имеется путь PL, состоящий из вершин P и L, и тогда $\tau(G) \geq |L| + |P| \geq \tau(G - M) + n$. Это на самом деле означает, что гипотеза 2 справедлива для графа G.

Таким образом, далее нам потребуется рассмотреть лишь случай, когда для вершины x выполняется альтернатива 2 (рис. 1). Легко видеть в этом случае, что поскольку $|P| + |Q| = n$ и, следовательно, хотя бы один из путей не превосходит $\frac{n}{2}$, то имеет место неравенство $\tau(G-M) \leq \tau(G) - \frac{1}{2}n$.

Предположим, L — путь порядка $\tau(G - M)$, вершины x и y — концевые вершины этого пути. Предположим, что для обеих вершин x и y выполняется альтернатива 2. Тогда в M имеются пути P, Q, R, S, такие что имеют место соотношения $|P| + |Q| = n$ и $|R| + |S| = n$, причем вершина x смежна с концевыми вершинами P, Q, а вершина y смежна

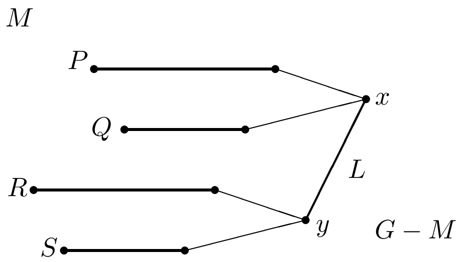

Рис. 1. Пути P, Q, R, S в M (альтернатива 2)

с концевыми вершинами R, S. Не ограничивая общности, можем предполагать, что $|P| \geq |R| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq |S| \geq |Q|$.

В этих условиях верны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть пути P и R такие, как описано выше, пересекаются между собой таким образом, что имеет место $p_1 = r_1$. Тогда имеет место неравенство $\tau(G-M) \leq \tau(G) + n$.*

Доказательство. Предположим, P и R пересекаются, причем $p_1 = r_1$, тогда в G имеется путь $P - L - Q$, и требуемое равенство выполняется.

Утверждение 2. *Пусть пути P и R такие, как описано выше, пересекаются между собой таким образом, что имеет место $p_q = r_q$. Тогда имеет место неравенство $\tau(G-M) \leq \tau(G) + n$.*

Доказательство. Пусть P и R пересекаются, причем таким образом, что $p_1 = r_q$. При этом в M, очевидно, имеется путь длины $2q-1$. Рассмотрим путь $P - R - L - q_1$, длина которого не менее, чем $|L| + n$, при условии, что путь R не пересекается с Q по вершине q_1.

Предположим, что Q пересекается с R по вершине q_1, причем $q_1 = r_i$ для некоторого i. При этом предположение о том, что $i < q-1$ приводит нас к противоречию с условием $\tau(M) \leq q$. Если же $i = q-1$, то в G, очевидно, имеется путь $Q - P - L$, и тем самым утверждение доказано.

Утверждение 3. *Пусть пути P и R такие, как описано выше, пересекаются между собой таким образом, что имеет место $p_1 = r_q$. Тогда имеет место неравенство $\tau(G-M) \leq \tau(G) + n$.*

Доказательство. Пусть P и R пересекаются, причем таким образом, что $p_1 = r_q$. При этом в графе G имеется путь $R - L - S$, для которого требуемое неравенство, очевидно, выполняется, и тем самым утверждение доказано.

Эти результаты в силу своей тривиальности, естественно, носят лишь вспомогательный характер. Дальнейшее доказательство потребует от нас раздельного рассмотрения двух различных случаев, в зависимости от четности n.

2. СЛУЧАЙ $|P| \geq |R| > \frac{N}{2} > |S| \geq |Q|$

Теорема 4. *Пусть G — некоторый граф, M — максимальное P_{n+1}-свободное множество в нем. Пусть P, R, Q, S — пути в M, такие как описано выше. Тогда, если $P = n - q$ и $n \geq 2q + 1$ при $q \leq 3$, справедливо неравенство*

$$\tau(G - M) \leq \tau(G) - n\,.$$

Доказательство. Если $R \cap P = \emptyset$, то в графе G имеется путь R, L, P, причем в силу нашего предположения $|R| \geq \frac{n}{2}$, имеет место неравенство $\tau(G) \geq |P| + |L| + |R| = n - 1 + |L| + |R| \geq n + |L|$.

Предположим теперь, что P и R пересекаются, т. е. для некоторых вершин p_i и r_j имеет место равенство $p_i = r_j$. Обозначим через P_1 часть пути P, состоящую из вершин $p_1, \ldots, p_{i-1}$, а через P_2 — $P - P_1$. Аналогично введем обозначения R_1 и R_2 для частей пути R. Предположим, $j > q$, тогда в G имеется путь $P_2 - R_1 - L - P_1$ и, следовательно,

$$\tau(G) \geq |P_2| + |R_1| + |L| + |P_1| = |P| + j - 1 + |L| \geq |P| + |Q| + |L| = n + \tau(G - M).$$

Отметим, что аналогичные рассуждения справедливы и для S. Предположим, что $j \leq q$, но при этом S пересекает P, т.е. имеет место равенство $p_k = s_m$ для некоторых m и $k \neq i$ (в силу того, что пути R и S не пересекаются между собой). Если при этом $m > q$, то путь $P_2 - S_1 - L - P_1$, где S_1 определяется аналогично R_1 и обладает тем же свойством, что и рассмотренный выше.

Таким образом, нам необходимо изучить случаи, когда и S и R пересекаются с P и при этом имеют место $j \leq q$ и $m \leq q$. Очевидно, количество этих случаев зависит от значения параметра q. Рассмотрим различные случаи для значений, которые может принимать q. Далее мы будем предполагать, что имеет место неравенство $i > k$. Такое предположение мы делаем исключительно для краткости изложения. Оно не ограничивает общности наших рассуждений, так как все то, что будет доказано для S, является справедливым и для R, т. е. для случая $i < k$.

Случай 1. Пусть $q = 1$, т. е. $s_1 = p_k$, где $k \geq 1$. Тогда в G имеется путь $\mathcal{L} = S - P_1 - L - R$, откуда

$$\tau(G) \geq |S| + |P_1| + |L| + |R| \geq |L| + n \geq \tau(G - M) + n.$$

Случай 2. Пусть $q = 2$. Если предположить, что S пересекает P по вершине s_1 или по вершине s_2, но при этом выполняется условие $k \geq 2$, то мы оказываемся в условиях случая 1, и тогда путь $\mathcal{L}$ является искомым.

Предположим, $s_2 = p_1$. Тогда в графе G имеется путь $\mathcal{L} = P - s_1 - L - q_1$ и требуемое неравенство для $\tau(G)$ выполняется. Однако, может оказаться, что пути S и Q пересекаются, а именно, что имеет место равенство $q_1 = s_1$. Однако в этом случае в качестве пути $\mathcal{L}$ может быть рассмотрен путь $s_{|S|}, \ldots . s_2 - q_1 - L - R$. Легко видеть, что $|\mathcal{L}| = n + |L|$, а это означает, что для случая 2 теорема верна.

Случай 3. Пусть $q = 3$ и S пересекает P, т. е. имеет место равенство $p_k = s_m$. Как и в предыдущем случае, если предположить, что $m \leq k$, то в графе G имеется путь $\mathcal{L} = S_2 - P_1 - |L| - R$, и все доказано. Если $m > k$, то в качестве $\mathcal{L}$ может быть рассмотрен путь $P_2 - S_1 - L - Q$, однако при этом необходимо учесть, что S и Q могут пересекаться.

Предположим, $p_1 = s_2$ и $q_1 = s_1$. Это не приводит нас к противоречию, так как в этом случае в G имеется путь $S - L - R$, подробно рассмотренный в предыдущем случае.

Допустим, $p_1 = s_3$, в этом случае, очевидно, $q_1 \neq s_1$, так как это противоречило бы предположению о том, что $\tau(M) \leq n$. Если предположить, что $q_1 = s_2$, то в графе G имеется путь $P - L - s_1 - q_1 - q_2$, который в этом случае может быть выбран в качестве $\mathcal{L}$.

Наконец, предположим, что $p_2 = s_3$. Тогда S может пересекаться с Q по вершинам q_1, q_2. Если $s_1 = q_1$, то в G имеется путь $P - L - Q$ порядка $|L| + n$, а если $s_1 = q_2$, то в G имеется путь $S - q_1 - L - R$, очевидно, что его порядок не менее, чем $|L| + n$. Пусть $s_2 = q_1$, тогда в G имеется путь $\mathcal{L} = P - L - s_1 - Q$, наконец, если $s_2 = q_2$, то в G имеется путь $\mathcal{L} = P - L - s_1 - q_2 - q_1$. Отметим, что в обоих последних случаях $|\mathcal{L}| \geq |L| + n$. Тем самым, теорема доказана полностью.

Отметим, что из доказанного утверждения следует и результат, полученный в [14]. Непосредственным следствием из теоремы 4 является следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть G — некоторый граф, M — максимальное P_8-свободное множество. Тогда имеет место неравенство:*

$$\tau(G - M) \leq \tau(G) + 7.$$

3. СЛУЧАЙ $|P| = |R| = |Q| = |S| \leq 4$

В настоящем разделе мы рассмотрим подробно случай $|P| = |R| = |S| = |Q| = q$ при $n = 2q$. Этот случай является самым сложным с точки зрения построения доказательства.

Лемма 6. *Пусть G — граф, M — максимальное P_7-свободное множество. Пусть $|P| = |R| = |Q| = |S| = 3$, тогда*

$$\tau(G - M) \leq \tau(G) - 6.$$

Доказательство. Ясно, что если никакие два из путей P, Q, R, S не пересекаются, то лемма доказана. Аналогично, легко понять, что, если пути R и S не пересекают оба путь P, то также доказательство вполне очевидно. Предположим, что и R и S пересекают путь P.

В силу утверждений 1, 2 и 3, для доказательства этой леммы нам достаточно рассмотреть лишь случаи, когда пути P и R пересекаются и при этом имеет место одно из равенств: $p_2 = r_2$, $p_2 = r_3$ или $p_1 = r_2$. Рассмотрим поочередно эти случаи. Они изображены на рис. 2, 3 и 4. Для случаев 1 и 3 отметим сразу, что, если S пересекает P по вершине p_3, то, очевидно, в G имеется путь $S - L - p_1 - p_2 - r_3$, и тем самым лемма доказана, так как $\tau(S - L - p_1 - p_2 - r_3) = |L| + 6$. Таким образом, нам достаточно рассмотреть подслучаи, когда S пересекает P по вершине p_1.

Отметим также, что в случае, когда S пересекает P по вершине p_1 и при этом имеет место одно из равенств $p_1 = s_1$ или $p_1 = s_3$, мы оказываемся в условиях утверждений 1 и 3 соответственно. Это еще более упрощает нашу задачу.

Случай $p_2 = r_2$. Предположим, что при этом $s_2 = p_1$. В этом случае в G имеется путь $P - s_1 - L - q_1 - q_2$, который удовлетворяет нашим требованиям. Необходимо проверить, что будет, если при этом окажется, что Q пересекает S по вершине s_1. Поскольку случай $q_1 = s_1$ тривиален в силу утверждения 1, достаточно рассмотреть лишь только случай, когда $s_1 = q_2$. Легко видеть, что в этом случае в G имеется путь $P - s_1 - q_1 - L - r_1$ и при этом требуемое неравенство имеет место.

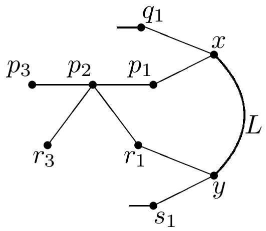

Рис. 2. Пути P и R пересекаются, причем $p_2 = r_2$

Случай $p_2 = r_3$. Этот случай в общем аналогичен предыдущему, даже немного проще. Итак, предположим, что $p_2 = r_3$ и при этом имеет место равенство $p_1 = s_2$. Тогда в G имеется путь $s_1 - p_1 - L - r_1 - r_2 - p_2 - p_3$, для которого, очевидно, имеет место требуемое неравенство. Таким образом, в этом случае лемма также верна.

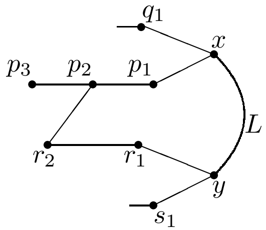

Рис. 3. Пути P и R пересекаются, причем $p_2 = r_3$

Случай $p_1 = r_2$. В этом случае можно было бы сделать такой же перебор, как и в двух предыдущих. Однако заметим, что если P и R пересекаются по p_1, то S пересекает P по p_2 или по p_3, а значит, имеет место один из случаев, разобранных выше, либо мы оказываемся в условиях одного из утверждений 1, 2 или 3 для путей P и S.

Таким образом, лемма доказана.

Подобный перебор, если бы его пришлось осуществлять для доказательства следующей леммы, занял бы гораздо больше места и сил. Поэтому здесь мы прибегли к иной технике доказательства.

Лемма 7. *Пусть G — граф, M — максимальное P_9-свободное множество. Пусть $|P| = |R| = |Q| = |S| = 4$, тогда $\tau(G - M) \leq \tau(G) - 8$.*

Доказательство. Отметим, что в силу того, что имеет место $|P| = |Q| = |R| = |S|$, можно сделать следующий вывод. Если какие-то два пути не пересекаются между собой, то лемма верна, поскольку, очевидно,

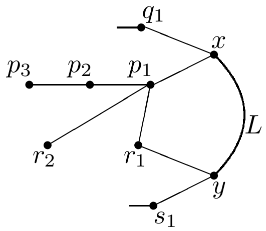

Рис. 4. К доказательству леммы 6.
Пути P и R пересекаются, причем $p_1 = r_2$

что в этом случае в графе G имеется путь длины $n+8$. Действительно, предположим, что P не пересекает ни R, ни S. Тогда в G имеется путь $P-L-S$ или $P-L-R$, который обеспечивает выполнение требуемого неравенства.

Предположим поэтому, что все 4 пути P, Q, R, S пересекаются между собой. Однако, поскольку нам известно, что P и Q, а также R и S между собой пересекаться не могут, очевидно, имеется 4 различных вершины v, w, u, z в M, такие что $w = P \cap R, v = P \cap S, u = Q \cap R, z = Q \cap S$. Для определенности (никак не ограничивая этим общности) предположим, что v — ближайшая к x и y вершина.

Ясно, что эти 4 вершины лежат на некотором цикле C, длина которого не превосходит 8, поскольку $\tau(M) \leq 8$.

Предположим, что $|V(C)| = 8$. Поскольку $v \in V(C)$, в G имеется путь, состоящий из вершин $V(C)$, вершин пути из v в x и далее из вершин пути L. Требуемое неравенство при этом выполняется.

Прежде, чем перейти к следующему шагу доказательства, заметим, что в силу утверждения 1 можем предположить, что хотя бы одна вершина из $N(x) \cap M$ имеет степень 2, т.е. не является одной из вершин v, w, u, z.

Допустим теперь, что имеет место неравенство $5 \leq |V(C)| \leq 7$. В этом случае один из путей P, Q, R, S пересекается с циклом C в точности по одному ребру. Предположим, что это путь P и (p_i, p_{i+1}) и есть это самое ребро. В таком случае, в графе G имеется путь длины $|P| + |V(C)| - 2 + |L| + 1 = |V(C)| + 3 + |L| \geq |L| + 8$. Следовательно, в этом случае лемма также верна.

Рассмотрим теперь случай $|V(C)| = 4$. Легко видеть, что в этом случае путь требуемой длины также может быть легко построен. Доказательство может быть получено исчерпывающим перебором всех возможных значений для вершин v, w, u, z.

Лемма доказана.

Из леммы 6, 7 и теоремы 4 легко следует следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть G — некоторый граф, M — максимальное P_{n+1}-свободное множество, где $n \leq 8$. Тогда имеет место неравенство:*

$$\tau(G - M) \leq \tau(G) - n.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные здесь результаты могут интерпретироваться следующим образом. Как уже говорилось, справедливость гипотезы 2 для всех $k \leq n$, где k — некоторое целое число, для произвольного графа G немедленно влечет справедливость гипотезы о τ–разбиваемости для $\tau \leq 2n - 1$ для произвольного графа G. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 9. *Любой граф G является 15 – разбиваемым.*

Этот результат не является принципиально новым, он уже был получен прежде авторами в работе [3] как следствие теоремы о существовании P_8-ядра, что позволяет использовать его как своего рода проверку результатов работы [3].

Однако, следует заметить, что использование данной техники и понятия P_n-свободного множества значительно упростило доказательства и снизило их объем.

Предполагаемая же авторами возможность обобщения теоремы 4 на большие значения q (а в перспективе — на произвольные значения q) при соответствующих значениях n демонстрирует далеко не исчерпанные в данной работе возможности использованной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мельников Л. С., Петренко И. В.** Существование путевых ядер и разбиений в неориентированных графах // Тез. докладов XIV Междунар. конф., посвященной 80-летию С.В.Яблонского “Проблемы теоретической кибернетики” (Пенза, 23–28 мая 2005 г.) / Под ред. О.Б.Лупанова. — М.: Изд-во механико–математического факультета МГУ, 2005. — С. 95.
2. **Мельников Л. С., Петренко И. В.** Путевые ядра и разбиения в графах с малыми длинами циклов // Методы и инструменты конструирования и оптимизации программ. — Новосибирск, 2005. — С. 145–160.

3. **Мельников Л. С., Петренко И. В.** О путевых ядрах и разбиениях в неориентированных графах // Дискретный анализ и исследование операций. — 2002. — Т. 9, Сер. 1, № 2. — С. 21–35.
4. **Мельников Л. С., Петренко И. В.** Путевые ядра и длины циклов в неориентированных графах // Современные проблемы конструирования программ. — Новосибирск, 2002. - С. 222–231.
5. **Aldred R. E. L., Thomassen C.** Graphs with not all possible path-kernel // Discrete Math. — 2004. — Vol. 285, N 1–3. — P. 297–300.
6. **Benade G., Broere I., Jonck B., Frick M.** Uniquely $(m, k)^{\tau}$-colorable graphs and $k - \tau$-saturated graphs // Discrete Math. — 1996. — Vol. 162, N 1–3. — P. 13–22.
7. **Berge C., Duchet P.** Recent problems and results about kernels in directed graphs // Discrete Math. — 1990. — Vol. 86, N 1–3. — P. 27–31.
8. **Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihók P., Semanišin G.** A survey of hereditary properties of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 1. — P. 5–50.
9. **Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M.** A path(ological) partition problem.// Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1998. — Vol. 18, N 1. — P. 113–125.
10. **Broere I., Frick M.** On the order of uniquely k, m-colorable graphs // Discrete Math. — 1990. — Vol. 82, N 3. — P. 225–232.
11. **Broere I., Hajnal P., Mihók P.** Partition problems and kernels of graphs// Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 2. — P. 311–313.
12. **Chartrand G., Geller D. P., Hedetniemi S. T.**, A generalization of the chromatic number // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1968. — Vol. 64, N 2. — P. 265–271.
13. **Dunbar J. E., Frick M.** Path kernels and partitions // J. Combin. Math. Combin. Comput. 1999. V. 31. pp. 137–149.
14. **Dunbar J. E., Frick M., Bullock F.** Path partitions and P_n–free sets // Discrete Math. — 2004. — Vol. 289, N 1–3. — P. 145–155.
15. **Frick M., van Aardt S., Dlamini G., Dunbar J., Oellermann O.** The directed path partition conjecture // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 2005. — Vol. 25, N 3. — P. 331–343.
16. **Hajnal P.** Partitions of graphs with condition on the connectivity and minimum degree// Combinatorica. — 1984. — Vol. 3, N 1. — P. 95–99.
17. **Hajnal P.** Graph partitions. — Ph. D. Thes. Szeged Attila Jósef University, 1984.
18. **Kapoor S. F., Kronk H. V., Lick D. R.** On deturs in graphs // Canad. Math. Bull. — 1966. — Vol. 11, N 2. — P. 195–201.
19. **Laborde J. M., Payan C., Xuong N. H.** Independent sets and longest directed paths in digraphs // Graphs and other combinatorial topics (Prague, 1982). — Leipzig: Teubner, 1983. — P. 173–177.
20. **Mihók P.** Problem 4 // Graphs, hypergraphs and mathroids. — Zielon Góra:Higher College Engrg., 1985. — P. 86.
21. **Vronka J.** Vertex sets of graphs with prescribed properties. — Ph. D. Thes. Košice, Safarik University, 1986.