Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт систем информатики
им. А. П. Ершова

А. В. Вотинцева

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ ДЛЯ СТРУКТУР СОБЫТИЙ

Препринт
41

Новосибирск 1997

Р. Глаббек и У. Гольц ввели ряд бисимуляций на структурах событий: интерливинговую, шаговую, частичного порядка, сохраняющую историю; установили их свойства и взаимосвязи. Ф. Шериф исследовал обратную бисимуляцию в интерливинговой семантике. На системах переходов Ф. Милнером было введено понятие слабой бисимуляции.

В данной работе рассматриваются обратные варианты бисимуляционных эквивалентностей на структурах событий в различных семантиках, определяется ряд бисимуляций, явно отражающих параллелизм и конфликт между событиями структуры. Для перечисленных эквивалентностей вводятся их слабые варианты, которые используют понятие "невидимых" действий. Установлена полная иерархия всех рассмотренных эквивалентностных понятий. Исследовано сохранение/несохранение под действием операции уточнения для всех вновь введенных бисимуляций.

Siberian Division of the Russian Academy of Sciences
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems

A. V. Votintseva

INVESTIGATION OF EQUIVALENCE NOTIONS FOR EVENT STRUCTURES

Preprint
41

Novosibirsk 1997

R. Glabbeek and U. Goltz have introduced a number of bisimulations on event structures: interleaving, step, pomset, history preserving, and established their relationships. F. Cherief considered the variant of back-and-forth bisimulation in interleaving semantics. The notion of weak bisimulation were investigated for labelled transition systems by R. Milner.

In this paper the back-and-forth variants of bisimulations in different semantics are considered for event structures, a number of bisimulations, reflecting explicitly concurrency and conflict between events in a structure, are defined. The weak variants (taking into account the invisible nature of silent move) of the mentioned bisimulations are introduced. The complete hierarchy of the all considered equivalence notions was established in the paper. For each recently introduced bisimulation we investigated the question about its preservation under the operation of action refinement. was established.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие методов проектирования параллельных/распределенных систем и изучение их свойств проводятся с помощью различных формальных моделей (сетей Петри, языков трасс, систем переходов, структур событий, деревьев причинной зависимости и др.), которые варьируются в зависимости от класса систем, степени детализации их структуры и поведения, а также от характера исследуемых проблем. При доказательстве свойств процессов, а также при переходе от одной абстрактной модели к другой необходимо выделение классов систем с эквивалентным поведением. К настоящему времени для различных моделей параллельных и распределенных процессов разработано большое число различных эквивалентностей. С целью классификации эквивалентностных понятий для моделируемых процессов необходимо исследовать различные их семантические представления и установить связи между ними.

Понятие бисимуляционной эквивалентности было введено в [9]. Неформально, два процесса бисимулярны, если выполнению какого-либо действия в любом из этих процессов "соответствует" выполнение того же самого действия в другом процессе. Значение бисимуляций в теории параллельных систем можно рассматривать в различных аспектах. С математической точки зрения бисимуляции являются естественной поведенческой абстракцией систем переходов. С алгебраической точки зрения при определении языков типа CCS бисимуляции приводят к элегантным и простым законам [5]. Кроме того, для бисимуляции построена логическая характеризация в терминах логики HML [5]. В обратных бисимуляциях [7] требуется взаимное моделирование поведения двух систем не только в будущем, но и в прошлом. Обратные бисимуляции привлекли к себе внимание благодаря их соответствию эквивалентностям, порожденным темпоральными логиками с модальностями для "прошлого".

Так как структуры событий [8] являются более общей моделью, по сравнению с системами переходов, то естественно желание определить упомянутые эквивалентности в контексте данной модели. Различные понятия бисимуляционных эквивалентностей между структурами событий и вопрос их сохранения при выполнении операции уточнения рассматриваются в [2]–[4]. Известно, что одно из достоинств структур

[0]Работа поддержана фондом INTAS-RFBR (грант No 95-0378)

событий состоит в том, что они позволяют естественным образом представлять и изучать базовые отношения — причинную зависимость, параллелизм и конфликт (недетерминированный выбор) — на событиях параллельных систем. Однако известные в литературе прямые и обратные бисимуляции отображают только причинность и косвенно параллелизм между событиями моделируемых систем. Информация о конфликте потеряна в эквивалентностях такого типа. Поэтому необходимо ввести ряд бисимуляций, явно отражающих конфликт и параллелизм, и исследовать их взаимосвязи.

В последние годы в литературе изучался вопрос абстрагирования от внутренних действий системы при описании ее поведения. С этой целью в [6] Милнер ввел символ τ для обозначения “невидимого” (или “немого”) действия, т. е. неразличимого для внешнего наблюдателя. Благодаря этому стало возможным определить слабые бисимуляции, которые различают только “видимое” поведение структур. В литературе этот вопрос изучался для процессных алгебр и помеченных систем переходов (labelled transition systems) в интерливинговой семантике.

В данной работе для введенных ранее сильных, т. е. не отличающих внутреннее действие τ от остальных действий, бисимуляций на структурах событий (интерливинговой, шаговой, частичного порядка и сохраняющей историю) рассматриваются их обратные варианты, определяются бисимуляции, явно отражающие конфликт и параллелизм между событиями в структурах событий; определяются слабые варианты для перечисленных бисимуляций и исследуются их свойства и взаимосвязи с сильными.

Одним из наиболее важных свойств эквивалентностных понятий является их сохранение относительно алгебраических операций, поэтому с введением новых эквивалентностей встает вопрос о их поведении под действием операции уточнения [3]. Эта операция позволяет конструировать систему в стиле “сверху вниз”, т. е. меняя уровень абстракции посредством интерпретации действий высокого уровня более сложными процессами нижнего уровня. При этом поведение уточненной системы может быть выведено из поведения базовой системы и поведений процессов, на которые заменяются действия.

В данной работе для всех вновь введенных бисимуляций было установлено, сохраняются ли они под действием операции уточнения.

Работа построена следующим образом.

Во второй части определяется помеченная структура событий с “невидимыми” действиями, т.е. структура событий, на которой задана помечающая функция, сопоставляющая каждому событию некоторое действие из алфавита; вводятся также отношения между состояниями структуры событий (называемыми конфигурациями) и устанавливаются их свойства.

В третьей части рассматриваются сильные бисимуляции и их варианты: обратные, сохраняющие конфликт и сохраняющие параллелизм. Вводится новый вариант r-бисимуляции, особенность которой состоит в том, что она учитывает структуру максимальной конфигурации, являясь, таким образом, модификацией бисимуляции, сохраняющей историю. Строится полная иерархия всех сильных эквивалентностей.

В четвертой части вводятся слабые бисимуляции. Устанавливаются взаимосвязи между различными слабыми бисимуляциями, а также их связь с сильными.

В пятой главе определяется операция уточнения для структур событий с “невидимыми” действиями и исследуется поведение вновь введенных бисимуляций под действием этой операции.

В заключении формулируются основные результаты работы.

2. СТРУКТУРЫ СОБЫТИЙ

Будем использовать помеченную первичную структуру событий с “невидимыми” действиями (далее — структуру событий) как фундаментальную модель для вычислительных процессов. Структуры событий представляются множествами событий, на которых определены отношения, выражающие причинные зависимости и конфликты между событиями. Два события, которые не связаны ни отношением причинной зависимости, ни отношением конфликта, находятся в отношении параллелизма. Подмножества событий, соответствующие вычислениям в структуре событий, называются конфигурациями, которые должны быть бесконфликтными и левозамкнутыми относительно причинной зависимости (все предшественники для каждого события из конфигурации должны также присутствовать в этой конфигурации).

Определение 2.1. *Структура событий* над алфавитом Act (действие $\tau \notin Act$, символ τ служит для обозначения невидимого действия) — это четверка $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$, где

- E — счетное множество событий;
- $< \subseteq E \times E$ — иррефлексивный частичный порядок (отношение

причинной зависимости), удовлетворяющий принципу *конечности причин*:

$$\forall e \in E \diamond \{d \in E \mid d < e\} \text{ — конечно;}$$

- $\# \subseteq E \times E$ — симметричное и иррефлексивное отношение (отношение *конфликта*), удовлетворяющее принципу *наследования конфликта*:

$$\forall e_1, e_2, e_3 \in E \diamond e_1 < e_2 \ \& \ e_1 \# e_3 \Rightarrow e_2 \# e_3;$$

- $l : E \to Act_\tau$ — помечающая функция, где $Act_\tau = Act \cup \{\tau\}$. □

В дальнейшем будем расматривать фиксированное множество действий Act. Компоненты структуры событий $\mathcal{E}$ обозначаются через $E_\mathcal{E}$, $<_\mathcal{E}$, $\#_\mathcal{E}$ и $l_\mathcal{E}$. Для структуры событий $\mathcal{E}$ введем следующие обозначения:
$id = \{(e,e) \mid e \in E\}$; $\leq \, = \, < \cup \, id$;
$\lessdot \, = \, < \setminus <^2$ (непосредственная причинная зависимость);
$\smile \, = (E \times E) \setminus (\leq \cup \leq^{-1} \cup \#)$ (параллелизм); $co = \smile \cup \, id$.

Структура событий $\mathcal{E}$ называется: *пустой*, если $E_\mathcal{E} = \emptyset$; *конечной*, если $E_\mathcal{E}$ конечно; *бесконфликтной*, если $\#_\mathcal{E} = \emptyset$. Две структуры событий $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ называются *изоморфными* ($\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$) тогда и только тогда, когда существует биективное отображение между множествами $E_\mathcal{E}$ и $E_\mathcal{F}$, сохраняющее отношения $<$, $\#$ и пометку.

В графическом представлении структуры событий будем изображать только минимальные конфликты, опуская наследуемые. Отношение непосредственной причинной зависимости представляется дугами. На рис.1 приводится пример структуры событий, где $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $< \, = \{(e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4)\}$, $\# = \{(e_3, e_4), (e_4, e_3)\}$ и $l(e_1) = a$, $l(e_2) = b$, $l(e_3) = \tau$, $l(e_4) = b$.

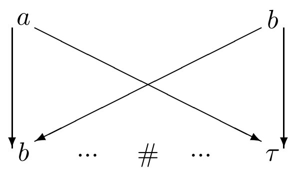


Рис. 1

В случаях, когда это возможно, будем использовать алгебраические выражения из [1] для представления примеров структур событий. Алгебраический синтаксис включает следующие операции: последовательную композицию (;), параллельную композицию ($\|$) и альтернативный выбор ($+$).

Состояния структуры событий называются конфигурациями. Конфигурация определяет множество событий, которые произошли к определенному моменту времени. Событие может присутствовать в конфигурации, если все его предшественники присутствуют в ней. Если события состоят в конфликте, то выполнение одного из них исключает выполнение остальных. Перед тем как дать формальное определение конфигурации, введем дополнительные обозначения.
Пусть $\mathcal{E}$ — структура событий и $C \subseteq E_\varepsilon$. Тогда

$\uparrow C = \{e \in E_\varepsilon \mid \exists e' \in C \diamond e' \leq_\varepsilon e\}$ и $\downarrow C = \{e \in E_\varepsilon \mid \exists e' \in C \diamond e \leq_\varepsilon e'\}$.
Для события $e \in E_\varepsilon$ будем писать $\uparrow e$ вместо $\uparrow \{e\}$ и $\downarrow e$ вместо $\downarrow \{e\}$.

Определение 2.2. *Конфигурация* структуры событий $\mathcal{E}$ — это подмножество $C \subseteq E_\varepsilon$ такое, что
- $\forall e, e' \in C : \neg(e \#_\varepsilon e')$ (бесконфликтность);
- $\forall e, e' \in E_\varepsilon : e \in C \;\&\; e' \leq_\varepsilon e \Rightarrow e' \in C$ (левозамкнутость). □

Через $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ обозначим множество всех конфигураций в $\mathcal{E}$.

Конфигурация $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ называется *максимальной*, если выполняется: $C' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \;\&\; C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$, т. е. C максимальна как множество. Через $\mathcal{RC}(\mathcal{E})$ будем обозначать множество максимальных конфигураций структуры событий $\mathcal{E}$. Очевидно, что $\downarrow e$ будет конфигурацией в $\mathcal{E}$ для любого $e \in E_\varepsilon$. Обозначим через $\mathcal{LC}(\mathcal{E}) = \{\downarrow e \mid e \in E_\varepsilon\}$ множество *локальных конфигураций* в $\mathcal{E}$ и через $\mathcal{LC}_0(\mathcal{E})$ множество $(\mathcal{LC}(\mathcal{E}) \cup \{\emptyset\})$. Определим $\mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{E}) = \{\downarrow e \in \mathcal{LC}(\mathcal{E}) \mid l_\varepsilon(e) \in Act\} \cup \{\emptyset\}$ как множество *видимых локальных конфигураций* в $\mathcal{E}$.

Пусть $C' \subseteq C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Тогда C' называется *шагом*, если $\forall e_1, e_2 \in C' \diamond \neg(e_1 <_\varepsilon e_2)$; *сужение* $\mathcal{E}$ на C' — это структура событий $\mathcal{E} \lceil C' = (C', <_\varepsilon \cap (C' \times C'), \#_\varepsilon \cap (C' \times C'), l_\varepsilon |_{C'})$; $pom_\varepsilon(C) = \{(\mathcal{E} \lceil (C'' \setminus C))/\cong \mid C \subseteq C'' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})\}$ — множество частично упорядоченных мультимножеств из C. Для любого множества $C' \subseteq E_\varepsilon$ будем считать, что C' также обозначает частично упорядоченное мультимножество $(\mathcal{E}\lceil C')/\cong$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для $C \subseteq E_\varepsilon$ и $p \in pom_\varepsilon(C)$:

$vis(C) = \{e \in C \mid l_\varepsilon(e) \in Act\}$; $vis(p) = p \lceil vis(E_p)$;
$hart(C) = \downarrow vis(C) \cap \uparrow vis(C)$; $hart(p) = p \lceil hart(E_p)$.

Определение 2.3. Пусть $\mathcal{E}$ — структура событий и $C, C' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Тогда

а) $C \rightarrow_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ C \subseteq C'$,
$\mapsto_{\mathcal{E}}$ обозначает $\rightarrow_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{LC}_0^2(\mathcal{E})}$;

б) $C \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ C \rightarrow_{\mathcal{E}} C'$ и $C' \setminus C = p$, где $p \in pom_{\mathcal{E}}(C)$,
$\stackrel{p}{\mapsto}_{\mathcal{E}}$ обозначает $\xrightarrow{p}_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{LC}_0^2(\mathcal{E})}$;

в) $C \stackrel{\epsilon}{\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ C \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C'$ и $vis(p) = \emptyset$,
$\stackrel{\epsilon}{\models\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{E}}$ обозначает $\stackrel{\epsilon}{\Rightarrow}_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{LC}_0^2(\mathcal{E})}$;

г) $C \stackrel{p}{\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ \exists C_1, C_2 \diamond C \stackrel{\epsilon}{\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C_1 \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C_2 \stackrel{\epsilon}{\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C'$ и $p = hart(p)$,
$C \stackrel{p}{\models\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ \exists C_1, C_2 \diamond C \stackrel{\epsilon}{\models\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C_1 \stackrel{p}{\mapsto}_{\mathcal{E}} C_2 \stackrel{\epsilon}{\models\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C'$ и $p = hart(p)$;

д) $C \uparrow_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ \exists C'' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \diamond (C \rightarrow_{\mathcal{E}} C'' \ \& \ C' \rightarrow_{\mathcal{E}} C'')$,
$\underline{\uparrow}_{\mathcal{E}}$ обозначает $\uparrow_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{LC}_0^2(\mathcal{E})}$;

е) $C \not\uparrow_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ \neg(C \uparrow_{\mathcal{E}} C')$,
$\underline{\not\uparrow}_{\mathcal{E}}$ обозначает $\not\uparrow_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{LC}_0^2(\mathcal{E})}$;

ж) $C \uparrow'_{\mathcal{E}} C' \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ \neg(C \not\uparrow_{\mathcal{E}} C' \ \vee \ C \rightarrow_{\mathcal{E}} C' \ \vee \ C' \rightarrow_{\mathcal{E}} C)$,
$\underline{\uparrow}'_{\mathcal{E}}$ обозначает $\uparrow'_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{LC}_0^2(\mathcal{E})}$. □

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{E}$ — структура событий, $C, C' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ и $\downarrow d, \downarrow d' \in \mathcal{LC}(\mathcal{E})$. Тогда

а) $C \uparrow_{\mathcal{E}} C' \iff C \cup C' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$;
б) $C \not\uparrow_{\mathcal{E}} C' \iff \exists e \in C \ \exists e' \in C' \diamond e \ \#_{\mathcal{E}} \ e'$;
в) $C \uparrow'_{\mathcal{E}} C' \iff \forall e \in (C \setminus C') \neq \emptyset \ \forall e' \in (C' \setminus C) \neq \emptyset \ \diamond e \smile_{\mathcal{E}} e'$;
г) $\downarrow d \mapsto_{\mathcal{E}} \downarrow d' \iff d \leq_{\mathcal{E}} d'$;
д) $\downarrow d \ \underline{\not\uparrow}_{\mathcal{E}} \downarrow d' \iff d \ \#_{\mathcal{E}} \ d'$;
е) $\downarrow d \ \underline{\uparrow}'_{\mathcal{E}} \downarrow d' \iff d \smile_{\mathcal{E}} d'$.

Доказательство очевидно следует из определения 2.3. □

Структура событий $\mathcal{E}$ называется *структурой событий без автопараллелизма*, если $\forall e, e' \in E_{\mathcal{E}} \diamond (e \ co_{\mathcal{E}} \ e' \ \& \ l_{\mathcal{E}}(e) = l_{\mathcal{E}}(e')) \Rightarrow e = e'$.

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{E}$ — структура событий без автопараллелизма и C, C', $C'' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ $(C' \neq C'')$. Тогда $C' \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C$ и $C'' \xrightarrow{q}_{\mathcal{E}} C \ \Rightarrow \ p \not\simeq q$.

Доказательство. Пусть $C' \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C$ и $C'' \xrightarrow{q}_{\mathcal{E}} C$. Предположим противное, т. е. существует изоморфизм $f : (C \setminus C') \rightarrow (C \setminus C'')$. Так как $C' \neq C''$, то существуют $e \in C'' \setminus C' \subseteq (C \setminus C')$ и $f(e) \in C' \setminus C'' \subseteq (C \setminus C'')$ такие, что $e \neq_{\mathcal{E}} f(e)$. Рассмотрим возможные отношения между e и $f(e)$:

$f(e) <_{\mathcal{E}} e$ ($e <_{\mathcal{E}} f(e)$) противоречит $C'' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ ($C' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$); $e \#_{\mathcal{E}} f(e)$ противоречит $e, f(e) \in C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$; $e \smile_{\mathcal{E}} f(e)$ противоречит тому, что $\mathcal{E}$ — структура событий без автопараллелизма. $\square$

В дальнейшем будем рассматривать только структуры событий без автопараллелизма и называть их просто структурами событий.

3. СИЛЬНЫЕ БИСИМУЛЯЦИИ

В данной главе рассматриваются бисимуляции, исследованные в работах [2, 4], вводятся несколько новых вариантов бисимуляций для более точного отражения всех существующих отношений между событиями в структурах событий.

Определение 3.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}(\mathcal{F})$, $\alpha \in \{i, s, p, h\}$ и $\beta \in \{a, b, c, r\}^*$. Тогда
а) $\mathcal{B}$ называется *α-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{B}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– $\mathcal{E} \lceil C \cong \mathcal{F} \lceil D$ при $\alpha = h$,
– если $C \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C'$ и
 p состоит не более чем из одного элемента при $\alpha = i$,
 p является шагом при $\alpha = s$,
– то найдутся такие D' и q, что
 $D \xrightarrow{q}_{\mathcal{F}} D'$, $p \cong q$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,
– верно обратное;
б) $\mathcal{B}$ называется *αb-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является α-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– если $C' \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C$ и
 p состоит не более чем из одного элемента при $\alpha = i$,
 p является шагом при $\alpha = s$,
– то найдутся такие D' и q, что
 $D' \xrightarrow{q}_{\mathcal{F}} D$, $p \cong q$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,
– верно обратное;
в) $\mathcal{B}$ называется *αa-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является α-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– если $C \not\uparrow_{\mathcal{E}} C'$, то найдется такая D', что $D \not\uparrow_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,
– верно обратное;
г) $\mathcal{B}$ называется *αc-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является α-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– если $C \uparrow'_{\mathcal{E}} C'$, то найдется такая D', что $D \uparrow'_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное;

д)] $\mathcal{B}$ называется *αr-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является α-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, и верно следующее:

– для всех $R \in \mathcal{RC}(\mathcal{E})$ и $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, если $C \subseteq R$, найдутся такие $R' \in \mathcal{RC}(\mathcal{F})$ и $D \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$, что $D \subseteq R'$, $\mathcal{E} \lceil R \cong \mathcal{F} \lceil R'$ и $(C, D) \in \mathcal{B}$,

– верно обратное.

Будем говорить, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ *$\alpha\beta$-бисимулярны* (обозначается $\mathcal{E} \approx_{\alpha\beta} \mathcal{F}$), если между ними существует $\alpha\beta$-бисимуляция, т.е. отношение, которое является $\alpha\gamma$-бисимуляцией для всех $\gamma \in \beta$. $\square$

В следующих предложениях устанавливаются взаимосвязи между различными введенными бисимуляциями.

Утверждение 3.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\alpha, \alpha' \in \{i, s, p, h\}$ и $\beta \in \{a, c, r\}^*$. Тогда

$$\mathcal{E} \approx_{\alpha\beta b} \mathcal{F} \Longleftrightarrow \mathcal{E} \approx_{\alpha'\beta b} \mathcal{F}.$$

Доказательство. Достаточно доказать $\mathcal{E} \approx_{i\beta b} \mathcal{F} \Longleftrightarrow \mathcal{E} \approx_{h\beta b} \mathcal{F}$.

'$\Rightarrow$' Пусть $\mathcal{B}$ — $i\beta b$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Очевидно, $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{B}$. Пусть $(C, D) \in \mathcal{B}$. Доказательство будет состоять из трех частей.

1. Во-первых, необходимо показать $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$. Случай $C = \emptyset = D$ очевидный. Без ограничения общности предположим $\emptyset \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{E}} C_1 \ \ldots \ C_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{E}} C_n = C$. Так как $\mathcal{B}$ — $i\beta b$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, то существуют такие $D_n, D_{n-1}, \ \ldots, \ D_1$, что $\emptyset \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{F}} D_1 \ \ldots \ D_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{F}} D_n = D$ и $(C_i, D_i) \in \mathcal{B}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Будем доказывать индукцией по n.

$\mathbf{n = 1}$. Очевидно.

$\mathbf{n > 1}$. По предположению индукции существует изоморфизм $f_{n-1} : C_{n-1} \to D_{n-1}$. Так как $\mathcal{B}$ — $i\beta b$-бисимуляция, то можно расширить f_{n-1} до сохраняющей пометку биекции $f : C \to D$. Покажем, что f — изоморфизм. Предположим $C \setminus C_{n-1} = \{e\}$. Так как $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ и $D \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$, достаточно показать, что $e' <_{\mathcal{E}} e \Longleftrightarrow f(e') <_{\mathcal{F}} f(e)$ для всех $e' \in C_{n-1}$. Предположим противное, т. е. $e' <_{\mathcal{E}} e$ и $\neg(f(e') <_{\mathcal{F}} f(e))$ для некоторого $e' \in C_{n-1}$ (в обратную сторону доказывается аналогично). Без ограничения общности допустим $e' \lessdot_{\mathcal{E}} e$ и $l_{\mathcal{E}}(e') = a_{n-1}$; $f(e') =_{\mathcal{F}} f(e)$ противоречит тому, что f — биекция, сохраняющая пометку; $f(e) <_{\mathcal{F}} f(e')$ противоречит $D_{n-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$. Осталось рассмотреть $f(e) \smile_{\mathcal{F}} f(e')$. Имеем $D'_{n-1} = D \setminus \{f(e')\} \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$, $D'_{n-1} \subset D$, и $D \setminus D'_{n-1} = a_{n-1}$. Следовательно, $D'_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{F}} D$, по определению 2.3*б*. Так как $\mathcal{B}$ — $i\beta b$-бисимуляция, то существует C'_{n-1} такая, что $C'_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{E}} C$ и $(C'_{n-1}, D'_{n-1}) \in \mathcal{B}$. Пусть $C \setminus C'_{n-1} = \{e''\}$. Рассмотрим возможные отношения между e' и e'':

$e'' \leq_{\mathcal{E}} e'$. Тогда $e'' <_{\mathcal{E}} e$, что противоречит $C'_{n-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, потому что $e \in C'_{n-1}$ и $e'' \notin C'_{n-1}$;

$e' <_{\mathcal{E}} e''$. Получаем противоречие $e'' \notin C$, так как $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$;

$e' \#_{\mathcal{E}} e''$, что противоречит $e', e'' \in C$;

$e' \smile_{\mathcal{E}} e''$. Так как $l(e') = l(e'')$, получаем противоречие, потому что $\mathcal{E}$ без автопараллелизма.

Таким образом, $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$.

2. Пусть $C \xrightarrow{p'}_{\mathcal{E}} C'$. Без ограничения общности предположим $C \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{E}} C_1 \ \dots \ C_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{E}} C_n = C'$. Так как $\mathcal{B}$ — $i\beta b$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, то найдутся такие $D_1, \dots, D_{n-1}, D_n$, что $D \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{F}} D_1 \ \dots \ D_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{F}} D_n = D'$ и $(C_i, D_i) \in \mathcal{B}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Пусть $D' \setminus D = q'$. Тогда получаем $D \xrightarrow{q'}_{\mathcal{F}} D'$, по определению 2.3*б*. Так как $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$ и $\mathcal{E}\lceil C' \cong \mathcal{F}\lceil D'$ (по доказанному выше), то очевидно $p' \cong q'$.

3. Пусть $C'' \xrightarrow{p''}_{\mathcal{E}} C$. Доказательство аналогично предыдущему.

Таким образом, $\mathcal{B}$ — $h\beta b$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ согласно определению 3.1.

'$\Leftarrow$' Непосредственно следует из определения 3.1. $\square$

Утверждение 3.2. Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\alpha \in \{i, s, p, h\}$ и $\beta \in \{a, r\}^*$. Тогда

а) $\mathcal{E} \approx_{\alpha\beta b} \mathcal{F} \iff \mathcal{E} \approx_{h\beta c} \mathcal{F}$;

б) $\mathcal{E} \approx_{\alpha\beta b} \mathcal{F} \iff \mathcal{E} \approx_{\alpha\beta bc} \mathcal{F}$.

Доказательство.

а) '$\Rightarrow$' В соответствии с утверждением 3.1 достаточно рассмотреть случай $\alpha = h$. Пусть $\mathcal{B}$ — $h\beta b$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Требуется показать $h\beta c$-бисимулярность отношения $\mathcal{B}$. Предположим $(C, D) \in \mathcal{B}$ и $C \uparrow'_{\mathcal{E}} C'$. По определению 2.3*ж* и лемме 2.1*а,в*, имеем $C \neq C'$ и $C \cup C' = C'' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, что означает $C \subset C''$ и $C' \subset C''$. Пусть $p = C'' \setminus C$ и $p' = C'' \setminus C'$. Значит, $C \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} C''$ и $C' \xrightarrow{p'}_{\mathcal{E}} C''$ согласно определению 2.3*б*. Так как $\mathcal{B}$ — $h\beta b$-бисимуляция, то получаем $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$ и найдутся такие D'' и q, что $D \xrightarrow{q}_{\mathcal{F}} D''$, $p \cong q$ и $(C'', D'') \in \mathcal{B}$. Вновь, согласно $h\beta b$-бисимулярности $\mathcal{B}$, существуют D' и q' такие, что $D' \xrightarrow{q'}_{\mathcal{F}} D''$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$. Заметим, что $\mathcal{E}\lceil C' \cong \mathcal{F}\lceil D'$, $p' \cong q'$ и $\mathcal{E}\lceil C'' \cong \mathcal{F}\lceil D''$ согласно определению 3.1*а*. Необходимо показать $D \uparrow'_{\mathcal{F}} D'$. Предположим противное. По определению 2.3*д*, $D \uparrow_{\mathcal{F}} D'$. Поэтому возможны два случая:

1. $D \rightarrow_{\mathcal{E}} D'$. Это означает $D \subseteq D'$ согласно определению 2.3*а*. Если $D = D'$, то $\mathcal{E}\lceil(C'' \setminus C) \cong \mathcal{F}\lceil(D'' \setminus D) = \mathcal{F}\lceil(D'' \setminus D') \cong \mathcal{C}\lceil(C'' \setminus C')$, что

противоречит лемме 2.2, так как $C \neq C'$. Рассмотрим случай $D \subset D'$. Пусть $f : D' \to C'$ — изоморфизм и $C_0 = f(D)$. Очевидно, $C_0 \subset C'$. Покажем $C_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Очевидно, что C_0 бесконфликтно. Пусть $e \in C_0$ и $e' \in E_\mathcal{E}$ такие, что $e' <_\mathcal{E} e$. Так как $e \in C'$ и $C' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, то $e' \in C'$. Тогда, $f^{-1}(e) \in D$, $f^{-1}(e') \in D'$ и $f^{-1}(e') <_\mathcal{F} f^{-1}(e)$. Так как $D \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$, то получаем $f^{-1}(e') \in D$, что означает $e' \in C_0$, т. е. $C_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Следовательно, $C_0 \to_\mathcal{E} C'$ и $C_0 \to_\mathcal{E} C''$, по определению 2.3*а*. Очевидно, $\mathcal{E}\lceil(C'' \setminus C_0) \cong \mathcal{E}\lceil(C'' \setminus C)$. Поэтому $C_0 \neq C$ противоречит лемме 2.2 и $C_0 = C$ противоречит определению 2.3*ж*, потому что $C_0 \to_\mathcal{E} C'$ и $C_0 \uparrow'_\mathcal{E} C'$.

2. $D' \to_\mathcal{E} D$. Доказательство аналогично доказательству случая 1.

'$\Leftarrow$' Пусть $\mathcal{B}$ — минимальная $h\beta c$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Вначале покажем $i\beta b$-бисимулярность $\mathcal{B}$. Предположим $(C, D) \in \mathcal{B}$ и $C' \xrightarrow{a}_\mathcal{E} C$. Это означает $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$ согласно определению 3.1*a* и $C \setminus C' = a$ по определению 2.3*б*. Пусть $f : C \to D$ — изоморфизм и $C \setminus C' = \{e\}$. Возмем $D' = D \setminus \{f(e)\}$. Очевидно, $D \setminus D' = a$ и $\mathcal{E}\lceil C' \cong \mathcal{F}\lceil D'$. Тогда $D' \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$. Значит, $D' \xrightarrow{a}_\mathcal{F} D$ по определению 2.3*б*. Предположим противное, т. е. $(C', D') \notin \mathcal{B}$. Согласно $h\beta c$-бисимулярности $\mathcal{B}$ существуют C'', D'' и p, q такие, что $(C'', D'') \in \mathcal{B}$, $\mathcal{E}\lceil C'' \cong \mathcal{F}\lceil D''$ и $C'' \xrightarrow{p}_\mathcal{E} C$, $D'' \xrightarrow{q}_\mathcal{F} D$. При этом, $p \cong q$.

Таким образом, $C' \uparrow_\mathcal{E} C''$ (и $D' \uparrow_\mathcal{F} D''$) по определению 2.3*д*. В случае $C' = C''$ (или $D' = D''$) имеем $a = p \cong q$ (или $a = q \cong p$). Тогда $D' \neq D''$ (или $C' \neq C''$) противоречит лемме 2.2 и $D' = D''$ (или $C' = C''$) противоречит $(C', D') \notin \mathcal{B}$. Значит, $C' \neq C''$ (и $D' \neq D''$). Очевидно, $C \not\subset C'$ (и $D' \not\subset D''$). По определению 2.3*a* получаем $\neg(C' \to_\mathcal{E} C'')$ (и $\neg(D' \to_\mathcal{F} D''))$. Осталось рассмотреть два случая:

1. $C'' \to_\mathcal{E} C'$ (и $D'' \to_\mathcal{F} D'$). Пусть $C' \setminus C'' = p'$ (и $D' \setminus D'' = q'$). Тогда $C'' \xrightarrow{p'}_\mathcal{E} C'$ (и $D'' \xrightarrow{q'}_\mathcal{F} D'$) согласно определению 2.3*б*. Из $h\beta c$-бисимулярности $\mathcal{B}$ следует, что существуют D''' (и C''') и q'' (и p'') такие, что $D'' \xrightarrow{q''}_\mathcal{F} D'''$ (и $C'' \xrightarrow{p''}_\mathcal{E} C'''$) и $(C', D''') \in \mathcal{B}$ (и $(C''', D') \in \mathcal{B}$). Так как $(C', D') \notin \mathcal{B}$, то $D' \neq D'''$ (и $C' \neq C'''$). Вновь согласно $h\beta c$-бисимулярности $\mathcal{B}$ получаем $\mathcal{E}\lceil C' \cong \mathcal{F}\lceil D'''$ (и $\mathcal{E}\lceil C''' \cong \mathcal{F}\lceil D'$), и найдутся такие $\widetilde{D}$ (и $\widetilde{C}$) и a, что $D''' \xrightarrow{a}_\mathcal{F} \widetilde{D}$ (и $C''' \xrightarrow{a}_\mathcal{E} \widetilde{C}$) и $(C, \widetilde{D}) \in \mathcal{B}$ (и $(\widetilde{C}, D) \in \mathcal{B}$). Из леммы 2.2 следует $D \neq \widetilde{D}$ (и $C \neq \widetilde{C}$), потому что $D' \neq D'''$ (и $C' \neq C'''$). Легко видеть, что $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{(C, D)\}$ — $h\beta c$-бисимуляция, что противоречит минимальности $\mathcal{B}$.

2. $C' \uparrow'_\mathcal{E} C''$ $\big($и $D' \uparrow'_\mathcal{F} D''\big)$. Тогда $C'' \setminus C' = a$ (и $D'' \setminus D' = a$) и $C' \setminus C'' = p$ (и $D' \setminus D'' = q$). Согласно $h\beta c$-бисимулярности $\mathcal{B}$ найдется такая D''' (и C'''), что $D'' \uparrow'_\mathcal{F} D'''$ $\big($и $C'' \uparrow'_\mathcal{E} C'''\big)$ и $(C', D''') \in \mathcal{B}$

$\big($и $(C''', D') \in \mathcal{B}\big)$. Так как $(C', D') \notin \mathcal{B}$, то $D' \neq D'''$ $\big($и $C' \neq C'''\big)$. Теперь покажем $D'' \setminus D''' = a$ $\big($и $C'' \setminus C''' = a\big)$ и $D''' \setminus D'' = q$ $\big($и $C''' \setminus C'' = p\big)$. Согласно $h\beta c$-бисимулярности $\mathcal{B}$ имеем $\mathcal{E}\lceil C' \cong \mathcal{F}\lceil D'''$ $\big($и $\mathcal{E}\lceil C''' \cong \mathcal{E}\lceil D'\big)$. Так как $\mathcal{E}\lceil C' \cong \mathcal{F}\lceil D'$, то существует изоморфизм $f : D' \to D'''$ $\big($и изоморфизм $g : C' \to C'''\big)$ такой, что $f(D' \cap D''') = D' \cap D'''$ (и $g(C' \cap C''') = C' \cap C'''$). Пусть $D'' \setminus D' = \{d\}$ $\big($и $C'' \setminus C' = \{e\}\big)$. Покажем $D'' \setminus D''' = \{d\}$ $\big($и $C'' \setminus C''' = \{e\}\big)$. Предположим противное, т.е. существует $d' \in D'' \setminus D'''$ $\big($и $e' \in C'' \setminus C'''\big)$ такое, что $d' \neq_{\mathcal{F}} d$ $\big($и $e' \neq_{\mathcal{E}} e\big)$. Тогда $d' \in D' \setminus D'''$ $\big($и $e' \in C' \setminus C'''\big)$ и $f(d') \in D''' \setminus D'$ $\big($и $g(e') \in C''' \setminus C'\big)$. Очевидно, $d' \neq_{\mathcal{F}} f(d')$ $\big($и $e' \neq_{\mathcal{E}} g(e')\big)$. Осталось рассмотреть четыре случая:

- $d' \smile_{\mathcal{F}} f(d')$ $\big($и $e' \smile_{\mathcal{E}} g(e')\big)$. Это противоречит тому, что $\mathcal{F}$ $\big($и $\mathcal{E}\big)$ без автопараллелизма;
- $d' \#_{\mathcal{F}} f(d')$ $\big($и $e' \#_{\mathcal{E}} g(e')\big)$. По лемме 2.1*б* имеем $D'' \not\uparrow_{\mathcal{F}} D'''$ $\big($и $C'' \not\uparrow_{\mathcal{E}} C'''\big)$, что противоречит определению 2.3*ж*, так как $D'' \uparrow'_{\mathcal{F}} D'''$ $\big($и $C'' \uparrow'_{\mathcal{E}} C'''\big)$;
- $d' <_{\mathcal{F}} f(d')$ $\big($и $e' <_{\mathcal{E}} g(e')\big)$, что противоречит $D''' \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ $\big($и $C''' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})\big)$;
- $f(d') <_{\mathcal{F}} d'$ $\big($и $g(e') <_{\mathcal{E}} e'\big)$, что противоречит $D' \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ $\big($и $C' \in \mathcal{C}(\mathcal{E})\big)$.

Таким образом, $D'' \setminus D''' = a$ $\big($и $C'' \setminus C''' = a\big)$. Более того, $D'' \cap D''' = D'' \cap D'$ $\big($и $C'' \cap C''' = C'' \cap C'\big)$. Значит, $D''' \setminus D'' = D''' \setminus (D''' \cap D'') = f(D' \setminus (D' \cap D'')) = f(D' \setminus D'') = q$ $\big($и $C''' \setminus C'' = C''' \setminus (C' \cap C'') = g(C' \setminus (C' \cap C'')) = g(C' \setminus C'') = p\big)$. Пусть $\widetilde{D} = D'' \cup D'''$ $\big($и $\widetilde{C} = C'' \cup C'''\big)$. Это означает $D''' \xrightarrow{a}_{\mathcal{F}} \widetilde{D}$ $\big($и $C''' \xrightarrow{a}_{\mathcal{E}} \widetilde{C}\big)$ и $D'' \xrightarrow{p}_{\mathcal{F}} \widetilde{D}$ $\big($и $C'' \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} \widetilde{C}\big)$ по определению 2.3*б* и лемме 2.1*a*. Без ограничения общности допустим $(C, \widetilde{D})$, $(\widetilde{C}, D) \in \mathcal{B}$. Так как $D' \neq D'''$ $\big($и $C' \neq C'''\big)$, то $D \neq \widetilde{D}$ (и $C \neq \widetilde{C}$) согласно лемме 2.2. Легко видеть, что $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{(C, D)\}$ — $h\beta c$-бисимуляция, что противоречит минимальности $\mathcal{B}$.

Таким образом, $\mathcal{B}$ — $\alpha\beta b$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ в соответствии с утверждением 3.1.

б) '$\Rightarrow$' следует из предыдущего пункта данного утверждения и определения 3.1*б,г*.
'$\Leftarrow$' следует из определения 3.1. □

Утверждение 3.3. Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\beta \in \{a, b, c\}^*$. Тогда

$$\mathcal{E} \approx_{h\beta} \mathcal{F} \Longleftrightarrow \mathcal{E} \approx_{h\beta r} \mathcal{F}.$$

Доказательство. '$\Rightarrow$'. Пусть $\mathcal{E} \approx_{h\beta} \mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ — $h\beta$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, $R \in \mathcal{RC}(\mathcal{E})$ и $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ такие, что $C \subseteq R$. Тогда $C \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} R$ по определению 2.3*а,б*. Так как $\mathcal{B}$ является $h\beta$-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, то существует конфигурация $D \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ такая, что $(C, D) \in \mathcal{B}$ и $\mathcal{E} \lceil C \cong \mathcal{F} \lceil D$. По определению 3.1$a$ существует $R' \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ такая, что $D \xrightarrow{q}_{\mathcal{F}} R'$, $p \cong q$, $(R, R') \in \mathcal{B}$ и $\mathcal{E}\lceil R \cong \mathcal{F}\lceil R'$. Согласно определению 2.3a $D \subseteq R'$. Необходимо показать $R' \in \mathcal{RC}(\mathcal{F})$. Предположим противное, т. е. существует $R'' \in \mathcal{RC}(\mathcal{F})$ такая, что $R' \subset R''$. По определению 2.3*а,б* имеем $R' \xrightarrow{q}_{\mathcal{F}} R''$ и $q' \neq \emptyset$. Тогда существует такая $\tilde{R}$, что $R \xrightarrow{p'}_{\mathcal{E}} \tilde{R}$ и $p' \cong q'$ в соответствии с определением 3.1a. Это означает $R \subset \tilde{R}$ по определению 2.3a, что противоречит $R \in \mathcal{RC}(\mathcal{E})$. В обратную сторону доказывается аналогично.
'$\Leftarrow$' следует из определения 3.1. $\square$

Далее введем дополнительные понятия бисимуляций, которые определяются на области локальных конфигураций структур событий.

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{LC}_0(\mathcal{E}) \times \mathcal{LC}_0(\mathcal{F})$ и $\beta \in \{a, b, c, r\}^*$. Тогда
а) $\mathcal{B}$ называется *локальной бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{B}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– если $C \overset{p}{\mapsto}_{\mathcal{E}} C'$, то найдутся такие D' и q,что $D \overset{q}{\mapsto}_{\mathcal{F}} D'$, $p \cong q$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,
– верно обратное;
б) $\mathcal{B}$ называется *локальной b-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является локальной бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– если $C' \overset{p}{\mapsto}_{\mathcal{E}} C$, то найдутся такие D' и q, что $D' \overset{q}{\mapsto}_{\mathcal{F}} D$, $p \cong q$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,
– верно обратное;
в) $\mathcal{B}$ называется *локальной a-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является локальной бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– если $C \,\underline{\not\uparrow}_{\mathcal{E}} C'$, то найдется такая D', что $D \,\underline{\not\uparrow}_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,
– верно обратное;
г) $\mathcal{B}$ называется *локальной c-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является локальной бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– если $C \,\underline{\uparrow}'_{\mathcal{E}} C'$, то найдется такая D', что $D \,\underline{\uparrow}'_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,
– верно обратное;

д) $\mathcal{B}$ называется *локальной r-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является локальной бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и верно следующее:

– для всех $R \in \mathcal{RC}(\mathcal{E})$, если $\downarrow e \subseteq R$, то найдутся такие $R' \in \mathcal{RC}(\mathcal{F})$ и $\downarrow d \subseteq R'$, что $\mathcal{E} \lceil R \cong \mathcal{F} \lceil R'$ и $(\downarrow e, \downarrow d) \in \mathcal{B}$,

– верно обратное.

Будем говорить, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ *локально β-бисимулярны* (обозначается $\mathcal{E} \approx_{l\beta} \mathcal{F}$), если между ними существует локальная β-бисимуляция, т. е. отношение, которое является локальной γ- бисимуляцией для всех $\gamma \in \beta$. $\square$

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\mathcal{B}$ — минимальная локальная бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, и $(C, D) \in \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$.

Доказательство. Пусть $\emptyset \overset{p}{\mapsto}_{\mathcal{E}} C$ и $\emptyset \overset{q}{\mapsto}_{\mathcal{F}} D$. Предположим противное, т. е. $p \ncong q$. Так как $\mathcal{B}$ — локальная бисимуляция, то найдутся такие $D' \in \mathcal{LC}_0(\mathcal{F})$ ($C' \in \mathcal{LC}_0(\mathcal{E})$) и q' (и p'), что $\emptyset \overset{q'}{\mapsto}_{\mathcal{F}} D'$ (и $\emptyset \overset{p'}{\mapsto}_{\mathcal{F}} C'$), $p \cong q'$ (и $q \cong p'$), и $(C, D') \in \mathcal{B}$ (и $(C', D) \in \mathcal{B}'$). Очевидно, $D \neq D'$ (и $C \neq C'$). Тогда $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{(C, D)\}$ — локальная бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, что противоречит минимальности $\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$. $\square$

Утверждение 3.4. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий и $\beta \in \{a, b, c, r\}^*$. Тогда

$$\mathcal{E} \approx_{h\beta} \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{E} \approx_{l\beta} \mathcal{F}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \approx_{h\beta} \mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ — $h\beta$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Рассмотрим отношение $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cap (\mathcal{LC}_0(\mathcal{E}) \times \mathcal{LC}_0(\mathcal{F}))$. Требуется показать $l\beta$-бисимулярность $\widetilde{\mathcal{B}}$. Докажем случай $\beta = \lambda$ (остальные случаи доказываются аналогично). Очевидно, $(\emptyset, \emptyset) \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Пусть $(C, D) \in \widetilde{\mathcal{B}}$ и $C \overset{p}{\mapsto}_{\mathcal{E}} C'$. Тогда $(C, D) \in \mathcal{B}$ по построению $\widetilde{\mathcal{B}}$ и $C \overset{p}{\rightarrow}_{\mathcal{E}} C'$ согласно определению 2.3*б*. Так как $\mathcal{B}$ — $h\beta$-бисимуляция, то $\mathcal{E}\lceil C \cong \mathcal{F}\lceil D$ и найдутся такие D' и q, что $D \overset{q}{\rightarrow}_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$. Более того, $\mathcal{E}\lceil C' \cong \mathcal{F}\lceil D'$ по определению 3.1*a*, что означает $p \cong q$ и $D' \in \mathcal{LC}_0(\mathcal{F})$. Значит, $D \overset{q}{\mapsto}_{\mathcal{F}} D'$ согласно определению 2.3*б* и $(C', D') \in \widetilde{\mathcal{B}}$ по построению $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Таким образом, $\mathcal{B}$ — локальная β-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ по определению 3.2. $\square$

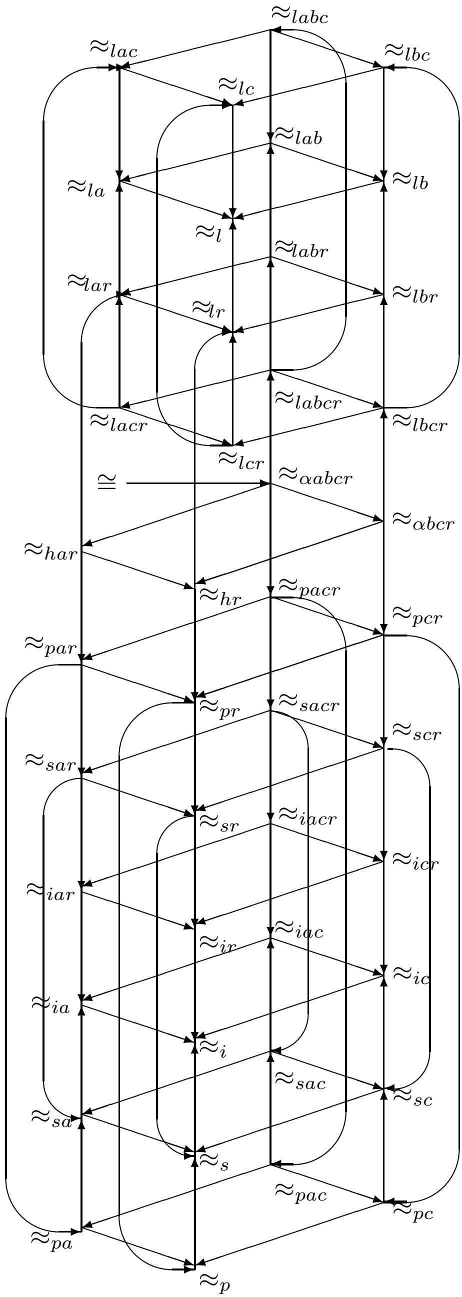

$\approx_{labc}$
$\approx_{lac}$
$\approx_{lbc}$
$\approx_{lc}$
$\approx_{lab}$
$\approx_{la}$
$\approx_{lb}$
$\approx_{l}$
$\approx_{labr}$
$\approx_{lar}$
$\approx_{lbr}$
$\approx_{lr}$
$\approx_{labcr}$
$\approx_{lacr}$
$\approx_{lbcr}$
$\approx_{lcr}$
$\cong$
$\approx_{\alpha abcr}$
$\approx_{\alpha bcr}$
$\approx_{har}$
$\approx_{hr}$
$\approx_{pacr}$
$\approx_{pcr}$
$\approx_{par}$
$\approx_{pr}$
$\approx_{sacr}$
$\approx_{scr}$
$\approx_{sar}$
$\approx_{sr}$
$\approx_{iacr}$
$\approx_{icr}$
$\approx_{iar}$
$\approx_{ir}$
$\approx_{iac}$
$\approx_{ic}$
$\approx_{ia}$
$\approx_{i}$
$\approx_{sac}$
$\approx_{sc}$
$\approx_{sa}$
$\approx_{s}$
$\approx_{pac}$
$\approx_{pc}$
$\approx_{pa}$
$\approx_{p}$

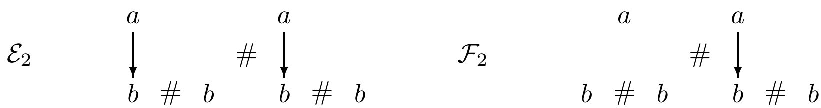
Рис. 2

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий и $\gamma, \delta \in \bigcup_{\beta \in \{a,b,c,r\}^*}$ $(\{\alpha\beta \mid \alpha \in \{i,s,p,h\}\} \cup \{l\beta\})$. Тогда верно следующее: $\mathcal{E} \approx_\gamma \mathcal{F}$ влечет $\mathcal{E} \approx_\delta \mathcal{F}$, если и только если на рис.2 существует путь, направленный от $\approx_\gamma$ к $\approx_\delta$.

Доказательство. '$\Rightarrow$' Требуется показать, что нельзя провести никакой другой вектор от одной эквивалентности к другой, если между ними не существует соответственно направленного пути на рис.2. Для этого приведем следующие контрпримеры.

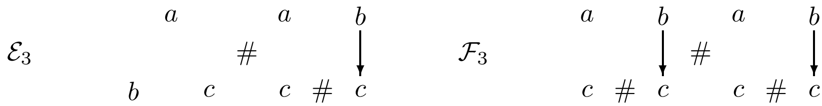
Структуры событий $\mathcal{E}_1 = (a;b) \ + \ (a;b)$ и $\mathcal{F}_1 = (a;b) \ + \ (a;(b \ + \ b))$ являются $\alpha\beta$-бисимулярными, но не изоморфными.

Структуры событий $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{F}_2$:



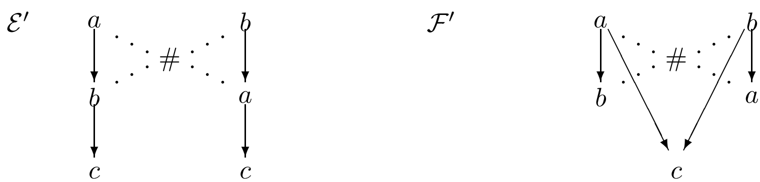
являются $\alpha'\beta'$-бисимулярными, но ни $\alpha' b\beta'$-, ни $h\beta$-, ни $l\beta$-бисимулярными для $\alpha' \in \{i,s,p\}$ и $\beta' \in \{a,c,r\}^*$.

Структуры событий $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{F}_3$:



являются $\alpha'\beta'$-бисимулярными, но ни $\alpha' b\beta'$-, ни $\alpha''\beta$-бисимулярными для $\alpha' \in \{i,s\}$, $\alpha'' \in \{p,h\}$ и $\beta' \in \{a,c,r\}^*$.

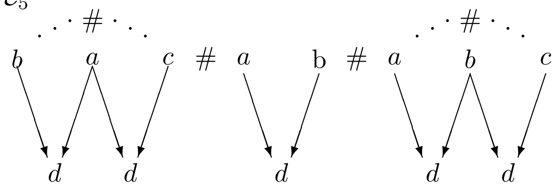
Рассмотрим структуры событий $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{F}'$:



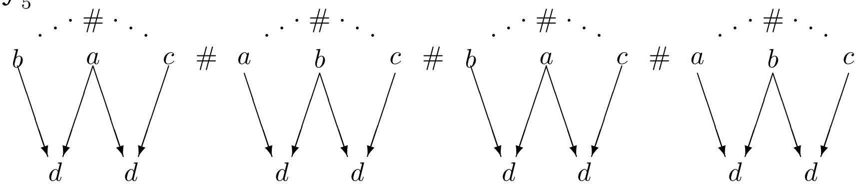
Составные структуры $\mathcal{E}_4 = (d \parallel \mathcal{E}') + (d \parallel \mathcal{F}')$ и $\mathcal{F}_4 = (d \parallel (\mathcal{E}' + \mathcal{F}')) + (d \parallel (\mathcal{E}' + \mathcal{F}'))$ являются $i\beta'$-бисимулярными, но ни $ib\beta'$-, ни $\alpha'\beta$-бисимулярными для $\alpha' \in \{s, p, h\}$ и $\beta' \in \{a, c, r\}^*$.

Структуры событий $\mathcal{E}_5$ и $\mathcal{F}_5$:

$\mathcal{E}_5$



$\mathcal{F}_5$

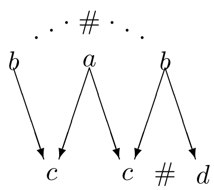


являются $\alpha\beta'$ и $l\beta'$-бисимулярными, но ни $\alpha b\beta'$-, ни $\alpha c\beta'$-, ни $lc\beta'$-, ни $lb\beta'$-бисимулярными для $\beta' \in \{a, r\}^*$.

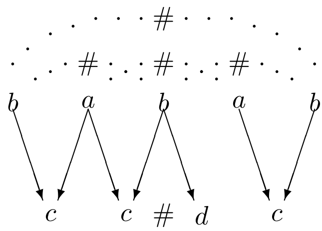
Структуры событий $\mathcal{E}_6 = a; b$ и $\mathcal{F}_6 = a; (b + b)$ являются $\alpha\beta'$- и $l\beta'$-бисимулярными, но ни $\alpha a\beta'$-, ни $la\beta'$-бисимулярными для $\beta' \in \{b, c, r\}^*$.

Рассмотрим структуры событий $\mathcal{E}''$ и $\mathcal{F}''$:

$\mathcal{E}''$



$\mathcal{F}''$

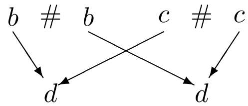


Составные структуры событий $\mathcal{E}_7 = \mathcal{E}'' + \mathcal{E}''$ и $\mathcal{F}_7 = \mathcal{F}'' + \mathcal{F}''$ будут $l\beta'$- бисимулярны, но ни $lb\beta'$-, ни $\alpha\beta$-бисимулярны для $\beta' \in \{a, c, r\}^*$.

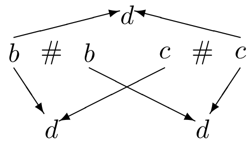
Структуры событий $\mathcal{E}_8 = (a \parallel (b + c)) + (a \parallel b) + (b \parallel (a + c))$ и $\mathcal{F}_8 = (a \parallel (b + c)) + (b \parallel (a + c)) + (a \parallel (b + c)) + (b \parallel (a + c))$ являются $\alpha\beta'$- и $l\beta''$-бисимулярными, но ни $\alpha c\beta''$-, ни $\alpha b\beta'$-, ни $lc\beta''$-бисимулярными для $\beta' \in \{a, r\}^*$ и $\beta'' \in \{a, b, r\}^*$.

В завершение рассмотрим структуры событий $\mathcal{E}_9$, $\mathcal{F}_9$ и $\mathcal{E}_{10}$:

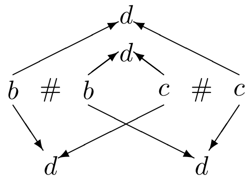
$\mathcal{E}_9$



$\mathcal{F}_9$



$\mathcal{E}_{10}$



Структуры событий $\mathcal{E}_9$ и $\mathcal{F}_9$ являются $l\beta$-бисимулярными, но не $\alpha\beta$-бисимулярными. Структуры событий $\mathcal{E}_{10}$ и $\mathcal{F}_9$ являются $l\beta'$-бисимулярными, но не $lr\beta'$-бисимулярными для $\beta' \in \{a, b, c\}^*$.
'$\Leftarrow$' Все включения, изображенные на рис.2, следуют из определений 3.1, 3.2 и утверждений 3.1–3.4. $\square$

4. СЛАБЫЕ БИСИМУЛЯЦИИ

Слабые бисимуляционные эквивалентности, которые принимают во внимание "невидимую" природу шага τ, являются вариантами сильных бисимуляционных эквивалентностей. В этом разделе мы рассмотрим некоторые различия между сильными и слабыми вариантами бисимуляций для структур событий.

Определение 4.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}(\mathcal{F})$, $\alpha \in \{i, s, p, h\}$ и $\beta \in \{a, b, c\}^*$. Тогда
а) $\mathcal{B}$ называется *слабой α-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{B}$, и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:
– $\mathcal{E} \lceil vis(C) \cong \mathcal{F} \lceil vis(D)$ при $\alpha = h$,

– если $C \stackrel{p}{\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C'$ и

  p состоит не более чем из одного элемента при $\alpha = i$,

  p является шагом при $\alpha = s$,

– то найдутся такие D' и q, что

  $D \stackrel{q}{\Rightarrow}_{\mathcal{F}} D'$, $vis(p) \cong vis(q)$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное;

б) $\mathcal{B}$ называется *слабой αb-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является слабой α-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:

– если $C' \stackrel{p}{\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C$ и

  p состоит не более чем из одного элемента при $\alpha = i$,

  p является шагом при $\alpha = s$,

– то найдутся такие D' и q,что

  $D' \stackrel{q}{\Rightarrow}_{\mathcal{F}} D$, $vis(p) \cong vis(q)$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное;

в) $\mathcal{B}$ называется *слабой αa-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является слабой α-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:

– если $C \not\uparrow_{\mathcal{E}} C'$, то найдется такая D', что $D \not\uparrow_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное;

г) $\mathcal{B}$ называется *слабой αc-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является слабой α-бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:

– если $C \uparrow'_{\mathcal{E}} C'$, то найдется такая D', что $D \uparrow'_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное.

Будем говорить, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ *слабо $\alpha\beta$-бисимулярны* (обозначается $\mathcal{E} \approx_{\tau\alpha\beta} \mathcal{F}$), если между ними существует слабая $\alpha\beta$-бисимуляция, т. е. отношение, которое является слабой $\alpha\gamma$-бисимуляцией для всех $\gamma \in \beta$. □

Утверждение 4.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\alpha, \alpha' \in \{i, s, p, h\}$ и $\beta \in \{a, c\}^*$. Тогда

$$\mathcal{E} \approx_{\tau\alpha\beta b} \mathcal{F} \iff \mathcal{E} \approx_{\tau\alpha'\beta b} \mathcal{F}.$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 3.1. □

Теперь введем варианты слабых бисимуляций, определенных на множестве видимых локальных конфигураций.

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{E}) \times \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{F})$ и $\beta \in \{a, b, c\}^*$. Тогда а) $\mathcal{B}$ называется *слабой локальной бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{B}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:

– если $C \overset{p}{\models\!\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C'$ и $C' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{E})$, то найдутся такие $D' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{F})$ и q, что $D \overset{q}{\models\!\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{F}} D'$, $vis(p) \cong vis(q)$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное;

б) $\mathcal{B}$ называется *слабой локальной b-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является слабой локальной бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:

– если $C' \overset{p}{\models\!\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{E}} C$ и $C' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{E})$, то найдутся такие $D' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{F})$ и q, что $D' \overset{q}{\models\!\!\!\Rightarrow}_{\mathcal{F}} D$, $vis(p) \cong vis(q)$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное;

в) $\mathcal{B}$ называется *слабой локальной a-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является слабой локальной бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:

– если $C \ \not\Uparrow_{\mathcal{E}} C'$ и $C' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{E})$, то найдется такая $D' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{F})$, что $D \ \not\Uparrow_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное;

г) $\mathcal{B}$ называется *слабой локальной c-бисимуляцией* между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B}$ является слабой локальной бисимуляцией между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ и для всех $(C, D) \in \mathcal{B}$ верно следующее:

– если $C \ \uparrow'_{\mathcal{E}} C'$ и $C' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{E})$, то найдется такая $D' \in \mathcal{LC}_{vis}(\mathcal{F})$, что $D \ \uparrow'_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$,

– верно обратное.

Будем говорить, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ *слабо локально β-бисимулярны* (обозначается $\mathcal{E} \approx_{\tau l \beta} \mathcal{F}$), если между ними существует слабая локальная β-бисимуляция, т. е. отношение, которое является слабой локальной γ-бисимуляцией для всех $\gamma \in \beta$. $\square$

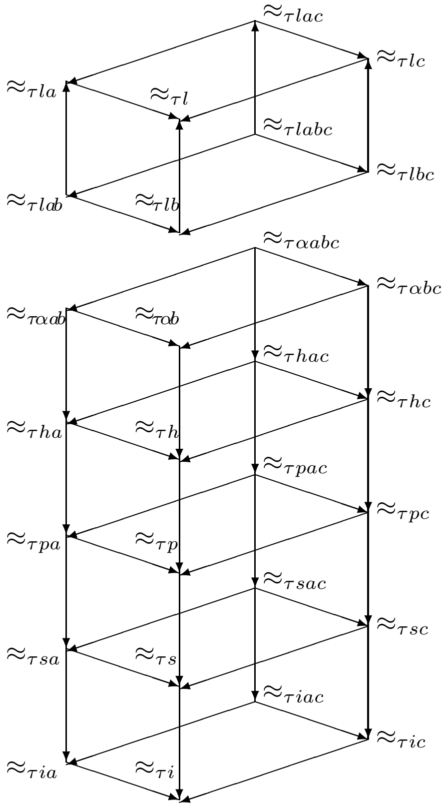


Рис. 3

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий и $\gamma, \delta \in \bigcup_{\beta \in \{a,b,c\}^*}$ $(\{\alpha\beta \mid \alpha \in \{i, s, p, h\}\} \cup \{l\beta\})$. Тогда верно следующее:

а) $\mathcal{E} \approx_{\tau\gamma} \mathcal{F}$ влечет $\mathcal{E} \approx_{\tau\delta} \mathcal{F}$, если и только если на рис.3 существует путь, направленный от $\approx_{\tau\gamma}$ к $\approx_{\tau\delta}$;

б) $\mathcal{E} \approx_{\gamma} \mathcal{F}$ влечет $\mathcal{E} \approx_{\tau\delta} \mathcal{F}$, если и только если $\gamma = \delta$ или на рис.2 существует путь, направленный от $\approx_{\gamma}$ к $\approx_{\delta}$ и на рис.3 существует путь, направленный от $\approx_{\tau\gamma}$ к $\approx_{\tau\delta}$;

в) $\mathcal{E} \approx_{\tau\delta} \mathcal{F}$ не влечет $\mathcal{E} \approx_{\gamma} \mathcal{F}$ для всех γ и δ.

Доказательство.

а) ‘$\Rightarrow$’. Требуется показать, что нельзя провести никакой другой вектор от одной эквивалентности к другой, если между ними не существует соответственно направленного пути на рис.3. Для этого рассмотрим следующие контрпримеры.
Структуры событий $\mathcal{E}_{11}$ и $\mathcal{F}_{11}$:

$$\mathcal{E}_{11} \qquad \begin{array}{c} a \\ \# \\ a \end{array} \qquad\qquad\qquad \mathcal{F}_{11} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \tau \arrow[d] & & \\ a & \# & a \end{tikzcd}$$

являются $\tau\alpha\beta'$-бисимулярными, но не $\tau\alpha\beta' c$-бисимулярными для $\beta' \in \{a, b\}^*$.

Рассмотрим структуры событий $\mathcal{E}'''$ и $\mathcal{F}'''$:

$$\mathcal{E}''' \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] a \arrow[d] & \# & a \\ & & \# \\ \tau & \# & b \end{tikzcd} \qquad\qquad\qquad \mathcal{F}''' \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] a \arrow[d] & & \\ \tau & \# & b \end{tikzcd}$$

Композиции из этих структур $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}''' + \mathcal{E}'''$ и $\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}''' + \mathcal{F}'''$ $\tau\alpha\beta'$-бисимулярны, но не $\tau\alpha\beta' b$-бисимулярны для $\beta' \in \{a, c\}^*$.

Рассмотрим структуры событий $\mathcal{E}''''$ и $\mathcal{F}''''$:

$$\mathcal{E}'''' \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[d] \\ b \end{tikzcd} \qquad\qquad\qquad \mathcal{F}'''' \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] a \arrow[d] & \# & a \arrow[dr] & & \tau \arrow[dl] \\ b & & & b & \end{tikzcd}$$

Композиции из этих структур $\mathcal{E}_{13} = (\mathcal{E}'''' + \mathcal{E}'''') \parallel \tau \parallel \tau$ и $\mathcal{F}_{13} = \mathcal{F}'''' \parallel \tau$ $\tau\alpha\beta$-бисимулярны, но не $\tau l\beta$-бисимулярны.

Доказательство остальных включений аналогично доказательству теоремы 3.1 с использованием примеров $\mathcal{E}_1$–$\mathcal{E}_{10}$ и $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_9$, так как для структур событий без действий τ соответствующие сильные и слабые бисимуляции совпадают.

'$\Leftarrow$'. Все включения, изображенные на рис.3, следуют из определений 4.1, 4.2 и утверждения 4.1.

б) '$\Rightarrow$'. Согласно определениям 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2 легко видеть, что сильные бисимуляции влекут соответствующие слабые бисимуляции. Далее покажем, что нельзя провести никакой другой вектор от $\approx_\gamma$ к $\approx_{\tau\delta}$, если не существует пути, направленного от $\approx_{\tau\gamma}$ к $\approx_{\tau\delta}$ на рис.3 или от $\approx_\gamma$ к $\approx_\delta$ на рис.2. Для этого рассмотрим контрпримеры из теоремы 3.1.

Структуры событий

$\mathcal{E}_6$ и $\mathcal{F}_6$ являются $\alpha\beta'$- и $l\beta'$-бисимулярными, но ни $\tau\alpha a\beta'$-, ни $\tau la\beta'$-бисимулярными для $\beta' \in \{b, c\}^*$;

$\mathcal{E}_5$ и $\mathcal{F}_5$ являются $\alpha\beta'$ и $l\beta'$-бисимулярными, но ни $\tau\alpha b\beta'$-, ни $\tau\alpha c\beta''$-, ни $\tau lc\beta''$-, ни $\tau lb\beta'$-бисимулярными для $\beta' \in \{a\}^*$ и $\beta'' \in \{a, b\}^*$;

$\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{F}_2$ являются $\alpha'\beta'$-бисимулярными, но ни $\tau\alpha' b\beta'$-, ни $\tau h\beta$-, ни $\tau l\beta$-бисимулярными для $\alpha' \in \{i, s, p\}$ и $\beta' \in \{a, c\}^*$;

$\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{F}_3$ являются $\alpha'\beta'$-бисимулярными, но не $\tau\alpha''\beta$- бисимулярными для $\alpha' \in \{i, s\}$, $\alpha'' \in \{p, h\}$ и $\beta' \in \{a, c\}^*$;

$\mathcal{E}_4$ и $\mathcal{F}_4$ являются $i\beta'$-бисимулярными, но не $\tau\alpha'\beta$-бисимулярными для $\alpha' \in \{s, p, h\}$ и $\beta' \in \{a, c\}^*$;

$\mathcal{E}_9$ и $\mathcal{F}_9$ являются $l\beta$-бисимулярными, но не $\tau\alpha\beta$–бисимулярными;

$\mathcal{E}_7$ и $\mathcal{F}_7$ являются $l\beta'$- бисимулярными, но не $\tau lb\beta'$-бисимулярными для $\beta' \in \{a, c\}^*$;

$\mathcal{E}_8$ и $\mathcal{F}_8$ являются $l\beta''$-бисимулярными, но не $\tau lc\beta''$-бисимулярными для $\beta'' \in \{a, b\}^*$.

'$\Leftarrow$'. Все включения следуют из определений 3.1, 3.2, 4.1, 4.2 и теорем 3.1 и 4.1*a*.

в) Пример структур событий $\mathcal{E}_{14} = (a; (b\ +\ (b; \tau)))\ +\ (a; b)$ и $\mathcal{F}_{14} = (a; b)\ +\ (a; b)$ показывает, что никакая слабая бисимуляция не влечет никакую сильную, так как $\mathcal{E}_{14} \approx_{\tau\gamma} \mathcal{F}_{14}$, но $\mathcal{E}_{14} \not\approx_\gamma \mathcal{F}_{14}$. □

5. ОПЕРАЦИЯ УТОЧНЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ И БИСИМУЛЯЦИИ

Одним из наиболее важных свойств эквивалентностных понятий является их сохранение относительно операции уточнения действий. Поэтому с введением новых выриантов бисимуляций было бы интересно выяснить их поведение под влиянием функции уточнения. Эта операция позволяет конструировать систему в стиле "сверху вниз", т. е. меняя высокий уровень абстракции на более низкий посредством толкования действий как более сложных процессов. Рассмотрим определение операции уточнения для структур событий, которое было введено в работе [3]. *Функция уточнения* RF для любого действия a определяет конечную, бесконфликтную, непустую структуру событий $RF(a)$. Обычно операция уточнения заменяет на более сложные структуры только некоторые определенные действия, не изменяя остальные. Для единообразия будем предполагать, что функция уточнения заменяет эти действия на самих себя. Для "невидимого" действия также полагаем, что оно не меняется. Для данной структуры событий $\mathcal{E}$ и функции уточнения RF структура событий $RF(\mathcal{E})$ строится следующим образом. Каждое событие e, помеченное a, заменяется на структуру событий $\mathcal{E}_e = RF(a)$. Причинная зависимость и конфликт наследуется из $\mathcal{E}$: каждое событие, которое являлось причиной для e, будет причиной для всех событий в $\mathcal{E}_e$; для событий, у которых причиной было событие e, теперь будут причинами все события структуры $\mathcal{E}_e$; все события, состоящие в конфликте с e, будут состоять в конфликте со всеми событиями структуры событий $\mathcal{E}_e$.

Определение 5.1. Пусть $\mathcal{E}$ — структура событий и RF — *функция уточнения* (для $\mathcal{E}$), которая сопоставляет каждому действию $a \in Act$ конечную, бесконфликтную, непустую структуру событий $RF(a)$ и $RF(\tau) = (\{e\}, \emptyset\ , \emptyset\ , \tau)$. Тогда *уточнение* для структуры событий $\mathcal{E}$ посредством функции RF — это структура событий $RF(\mathcal{E}) = (E, <, \#, l)$, определенная следующим образом:

- $E_{RF(\mathcal{E})} = \{(e, e') \mid e \in E_{\mathcal{E}},\ e' \in E_{RF(l_{\mathcal{E}}(e))}\}$;
- $(e, e') <_{RF(\mathcal{E})} (d, d') \iff (e <_{\mathcal{E}} d) \vee (e = d \ \&\ e' <_{RF(l_{\mathcal{E}}(e))} d')$;
- $(e, e') \#_{RF(\mathcal{E})} (d, d') \iff (e \#_{\mathcal{E}} d)$;
- $l_{RF(\mathcal{E})}(e, e') = l_{RF(l_{\mathcal{E}}(e))}(e')$. □

Заметим, что уточнение $RF(\mathcal{E})$ для структуры событий $\mathcal{E}$ является структурой событий, что следует из определения 5.1 и ограничений, налагаемых на структуру событий $RF(a)$ для каждого a.

Утверждение 5.1 ([4]). Пусть $\mathcal{E}$ — структура событий и RF — функция уточнения (для $\mathcal{E}$). Множество $\tilde{C}$ называется *уточнением конфигурации* $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ посредством RF, если

- $\tilde{C} = \cup_{e \in C} \{e\} \times C_e$, где $\forall e \in C : C_e \in \mathcal{C}(RF(e)) \setminus \{\emptyset\}$;
- $e \in busy(\tilde{C}) \Rightarrow e$ — максимальный элемент в C по отношению $\leq_{\mathcal{E}}$, где $busy(\tilde{C}) := \{e \in C \mid C_e$ — неполная конфигурация$\}$.

Тогда $\mathcal{C}(RF(\mathcal{E})) = \{\tilde{C} \mid \tilde{C}$ — уточнение конфигурации $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})\}$. $\square$

Утверждение 5.2. Пусть $\alpha \in \{i, s, p\}$, $\beta \in \{a, b, c, r\}^*$, и $\beta' \in \{a, b, c\}^*$. Тогда под действием операции уточнения сохраняются следующие эквивалентности: $\approx_{h\beta}$, $\approx_{\alpha b\beta}$, $\approx_{l\beta}$, $\approx_{\tau h\beta'}$, $\approx_{\tau\alpha b\beta'}$ и $\approx_{\tau l\beta'}$.

Доказательство. Сначала покажем сохранение $\approx_{h\beta}$ под действием операции уточнения. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — структуры событий, RF — функция уточнения и $\mathcal{B}$ — $h\beta$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Введем дополнительные обозначения: $\widetilde{\mathcal{B}} = \{(\widetilde{C}, \widetilde{D}) \in \mathcal{C}(RF(\mathcal{E})) \times \mathcal{C}(RF(\mathcal{F}))| \ \exists (C, D) \in \mathcal{B}$ $\exists f : C \to D \diamond pr_1(\widetilde{C}) = C$, $pr_1(\widetilde{D}) = D$ и f — изоморфизм, удовлетворяющий условию $\forall e \in C \diamond C_e = D_{f(e)}\}$. В работе [4] было показано, что $\widetilde{\mathcal{B}}$ — h-бисимуляция между $RF(\mathcal{E})$ и $RF(\mathcal{F})$. Для $D \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ такой, что $(C, D) \in \mathcal{B}$, определим $ref_{\widetilde{C}}(D) = \bigcup_{d \in D} \{d\} \times D_d$, где $D_d = C_{f^{-1}(d)}$ для всех $d \in D$ и некоторого изоморфизма f из C на D. Согласно определению 2.2 и утверждению 5.1 легко видеть, что $ref_{\widetilde{C}}(D) \in \mathcal{C}(RF(\mathcal{F}))$. По построению $\widetilde{\mathcal{B}}$ получаем $(\widetilde{C}, ref_{\widetilde{C}}(D)) \in \widetilde{\mathcal{B}}$.

Покажем, что $\widetilde{\mathcal{B}}$ — $h\beta$-бисимуляция между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Пусть $(\widetilde{C}, \widetilde{D}) \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Тогда $(C, D) \in \mathcal{B}$, по построению $\widetilde{\mathcal{B}}$. Рассмотрим два случая.

$\beta = a$. Предположим $\widetilde{C} \not\uparrow_{RF(\varepsilon)} \widetilde{C}'$. По лемме 2.1*б* существуют такие $(e, g) \in \widetilde{C}$ и $(e', g') \in \widetilde{C}'$, что $(e, g) \#_{RF(\varepsilon)} (e', g')$, что означает $e \in C$, $e' \in C'$ и $e \#_{\varepsilon} e'$ согласно утверждению 5.1 и определению 5.1. Значит, $C \not\uparrow_{\varepsilon} C'$ вновь по лемме 2.1*б*. Так как $(C, D) \in \mathcal{B}$, то существует такая D', что $D \not\uparrow_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$ согласно определению 3.1*в*. Пусть $\widetilde{D}' = ref_{\widetilde{C}'}(D')$. Тогда $(\widetilde{C}', \widetilde{D}') \in \widetilde{\mathcal{B}}$. По лемме 2.1*б* найдутся такие $d \in D$ и $d' \in D'$, что $d \#_{\mathcal{F}} d'$. Тогда по определению 5.1 имеем $(d, g) \#_{RF(\mathcal{F})} (d', g')$ для всех $g \in E_{RF(l_{\mathcal{F}}(d))}$ и $g' \in E_{RF(l_{\mathcal{F}}(d'))}$. Согласно утверждению 5.1 $(d, g) \in \widetilde{D}$ и $(d', g') \in \widetilde{D}'$ для некоторых $g \in E_{RF(l_{\mathcal{F}}(d))}$ и $g' \in E_{RF(l_{\mathcal{F}}(d'))}$. Вновь по лемме 2.1*б* получаем $\widetilde{D} \not\uparrow_{RF(\mathcal{F})} \widetilde{D}'$.

$\beta = c$. Предположим $\widetilde{C} \uparrow'_{RF(\varepsilon)} \widetilde{C}'$. Согласно утверждению 5.1 и определению 5.1, возможны три случая:

- $C \xrightarrow{p}_{\varepsilon} C'$. По определению 3.1*а* существуют D' и q такие, что $D \xrightarrow{q}_{\mathcal{F}} D'$, $p \cong q$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$;
- $C' \xrightarrow{p}_{\varepsilon} C$. По определению 3.1*б* существуют D' и q такие, что $D' \xrightarrow{q}_{\mathcal{F}} D$, $p \cong q$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$;
- $C \uparrow'_{\varepsilon} C'$. По определению 3.1*г* существует такая D', что $D \uparrow'_{\mathcal{F}} D'$ и $(C', D') \in \mathcal{B}$.

Пусть $\widetilde{D}' = ref_{\widetilde{C}'}(D')$. Тогда $(\widetilde{C}', \widetilde{D}') \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Согласно лемме 2.1*в* имеем $(e, g) \smile_{RF(\mathcal{E})} (e', g')$ для всех $(e, g) \in (\widetilde{C} \setminus \widetilde{C}')$ и $(e', g') \in (\widetilde{C}' \setminus \widetilde{C})$. Возмем произвольные $(e, g) \in (\widetilde{C} \setminus \widetilde{C}')$ и $(e', g') \in (\widetilde{C}' \setminus \widetilde{C})$. Пусть $f : C \to D$ и $f' : C' \to D'$ — изоморфизмы. По утверждению 5.1 и построению $\widetilde{\mathcal{B}}$ получаем $(f(e), g) \in (\widetilde{D} \setminus \widetilde{D}')$ и $(f(e'), g') \in (\widetilde{D}' \setminus \widetilde{D})$. Достаточно показать, что $(f(e), g) \smile_{RF(\mathcal{F})} (f(e'), g')$. Предположим противное, т. е. $\neg((f(e), g) \smile_{RF(\mathcal{F})} (f(e'), g'))$. Очевидно, $(f(e), g) \neq_{RF(\mathcal{F})} (f(e'), g')$. Осталось рассмотреть три случая.

- $(f(e), g) \#_{RF(\mathcal{F})} (f(e'), g')$, что означает $f(e) \in D$, $f(e') \in D'$ и $f(e) \#_{\mathcal{F}} f(e')$ согласно определению 5.1 и утверждению 5.1. По лемме 2.1*б* имеем $D \not\uparrow_{\mathcal{F}} D'$, что противоречит определению 2.3*е*;
- $(f(e), g) <_{RF(\mathcal{F})} (f(e'), g')$, что противоречит $\widetilde{D}' \in \mathcal{C}(RF(\mathcal{F})$;
- $(f(e'), g') <_{RF(\mathcal{F})} (f(e), g)$, что противоречит $\widetilde{D} \in \mathcal{C}(RF(\mathcal{F})$.

Следовательно, $\widetilde{D} \uparrow'_{RF(\mathcal{F})} \widetilde{D}'$ согласно лемме 2.1*в*.

Таким образом, $\approx_{h\beta}$ сохраняется под действием операции уточнения в соответствии с определением 3.1. и утверждением 5.1.

Сохранение $\approx_{l\beta}$ доказывается аналогично. Сохранение $\approx_{\alpha b\beta}$ следует из утверждения 3.1 и доказанного выше.

Сохранение $\approx_{\tau h\beta'}$, $\approx_{\tau\alpha b\beta'}$ и $\approx_{\tau l\beta'}$ следует из определений 4.1, 4.2 и сохранения под действием операции уточнения эквивалентностей $\approx_{h\beta}$, $\approx_{\alpha b\beta'}$ и $\approx_{l\beta}$. □

Утверждение 5.3. Пусть $\alpha \in \{i, s, p\}$, $\beta \in \{a, c, r\}^*$ и $\beta' \in \{a, c\}^*$. Тогда $\approx_{\alpha\beta}$ и $\approx_{\tau\alpha\beta'}$ не сохраняются под действием операции уточнения действий.

Доказательство. Рассмотрим структуры событий $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$:

Композиции из этих структур $\mathcal{E}_{15} = \mathcal{E} + \mathcal{F} + (a||b)$ и $\mathcal{F}_{15} = \mathcal{F} + \mathcal{F} + (a||b)$ являются $\alpha'\beta$- и $\tau\alpha'\beta'$-бисимулярными для $\alpha' \in \{i, s\}$. После уточнения действия b до последовательности $b_1 \to b_2$ получаем $\mathcal{E}_{15} \not\approx_{\alpha'\beta} \mathcal{F}_{15}$ и $\mathcal{E}_{15} \not\approx_{\tau\alpha'\beta'} \mathcal{F}_{15}$.

Структуры событий $\mathcal{E}_4$ и $\mathcal{F}_4$ (из доказательства теоремы 3.1) являются $p\beta$- и $\tau p\beta'$-бисимулярными, но после уточнения действия a до последовательности $a_1 \to a_2$ получаем $\mathcal{E}_4 \not\approx_{p\beta} \mathcal{F}_4$ и $\mathcal{E}_4 \not\approx_{\tau p\beta'} \mathcal{F}_4$. $\square$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был рассмотрен ряд бисимуляций, явно отражающих конфликт и параллелизм, а также локальные варианты этих бисимуляций. На классе помеченных структур событий с "невидимыми" действиями введены слабые варианты для всех указанных бисимуляционных эквивалентностей. Дополнительно определено понятие r-бисимуляции, учитывающей структуры максимальных конфигураций. Исследованы взаимосвязи всех перечисленных эквивалентностей, построена их полная иерархия. Для всех вновь введенных бисимуляций установлено, сохраняются ли они относительно операции уточнения действий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boudol G., Castellani I. Concurrency and atomicity// Theoretical Comput. Sci. — 1988.— Vol. 59.— p.25–84.
2. Cherief F. Investigations of Back and Forth Bisimulations on Prime Event Structures// Computers and Artificial Intelligence — 1992.— Vol. 11, N 5.— p.481–496.
3. Glabbeek R., Goltz U. Equivalence Notions for Concurrent Systems and Refinement of Actions// Lect. Notes Comput. Sci. — 1989.— Vol. 379.— p.237–248.
4. Glabbeek R., Goltz U. Equivalences and Refinement // Lect. Notes Comput. Sci. — 1990.— Vol. 469.— p.309–333.
5. Hennesy M., Milner R. Algebraic laws for nondeterminism and concurrency// JACM — 1985.— Vol. 32, N 1.— p.137–161.
6. Milner R. A Calculus of Communicating Systems// Lect. Notes Comput. Sci. — 1980.— Vol. 92.
7. deNicola R., Montanari U., Vaandrager, F. Back and Forth Bisimulations// Lect. Notes Comput. Sci. — 1990.— Vol. 458.
8. Nielsen M., Plotkin G., Winskel G. Petri nets, event structures and domains// Theoretical Comput. Sci. —1981.— Vol. 13.— p.85–108.
9. Park D.M.R. Concurrency and automata on infinite sequences// Lect. Notes Comput. Sci. — 1981.— Vol. 104.— p.167–183.
10. Virbitskaite I.B., Votintseva A.V., Best E. Comparing Logical and Behavioural Equivalences for Event Structures. — Hildesheim, 1996.— (Prep./Hildesheimer Informatik-Berichte; N 27).

А. В. Вотинцева

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ ДЛЯ СТРУКТУР СОБЫТИЙ

Препринт
41

Рукопись поступила в редакцию 10.11.1997
Рецензент Е. А. Евстигнеев
Редактор Л. А. Карева

Подписано в печать 8.12.1997
Формат бумаги 60×84 1/16 Объем 1,7 уч.-изд.л., 1,9 п.л.
Тираж 75 экз.

Отпечатано на ризографе "AL Group"
630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 3