Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт систем информатики
им. А. П. Ершова

М. Ф. Мурзина

О ПРОДОЛЖЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ГРАФАХ КЭЛИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП

Препринт
88

Новосибирск 2001

Граф Кэли — одна из классических моделей для представления алгебраических групп. В данной работе изучается проблема продолжения кратчайших путей (геодезических) в графах Кэли некоторых гиперболических групп и групп целых чисел по сложению. Дается характеризация тупиковых вершин (вершин, из которых нет выхода по ребру с увеличением длины) в рассмотренных графах Кэли.

Siberian Division of the Russian Academy of Sciences
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems

M. F. Murzina

ON PROLONGATION OF GEODESICS IN THE CAYLEY GRAPHS OF SOME GROUPS

Preprint
88

Novosibirsk 2001

The Cayley graph — one of classical models for representation of algebraic groups. In the preprint the problem of prolongation of the shortest paths (geodesic) in the graphs of some hyperbolic groups and groups of integers on addition is studied. The performance of deadlock tops (that is, from which there is no exit on an edge with magnification of length) in the considered Cayley graphs is given.

ВВЕДЕНИЕ

Задача продолжения геодезических — одна из классических задач в геометрии.

Пусть G — группа с конечным порождающим множеством A, тогда построим граф Кэли $\Gamma(G, A)$, множество вершин которого — элементы группы G, а множество ребер — пары (g, ga), где $g \in G$, $a \in A \cup A^{-1}$. Если $g = a_1 \dots a_n$, $a_i \in A \cup A^{-1}$ и это кратчайшая возможная запись для элемента $g \in G$, то число n называется длиной элемента относительно порождающего множества A и обозначается $|g|_A$. Тогда последовательность вершин $1, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2 \dots a_n = g$, где 1 — единичный элемент, задает кратчайший (или геодезический) путь в графе Γ, соединяющий 1 и g. Число $n = |g|_A$ можно также считать длиной этого пути, если присвоить каждому ребру из Γ длину 1. Такая геодезическая будет непродолжаемой, а вершина g — тупиковой, если $|ga|_A \leq |g|_A$ для всех $a \in A \cup A^{-1}$.

Богопольский О.В. [1], изучая некоторые свойства гиперболических групп, столкнулся с задачей продолжения геодезических в графах Кэли таких групп. Оказалось, что геодезические в графах Кэли групп не всегда продолжаемы. В качестве примера указывалась евклидова группа $G_3 = \langle x, y | x^3 = y^3 = (xy)^3 = 1 \rangle$, в которой вершины $(xyx)^n, (yxy)^n$, $n \in N$ являются тупиками относительно продолжения геодезических. Наличие тупиков зависит от выбора порождающего множества группы.

До сих пор не решены естественные вопросы из [1]:

1) Для любой ли бесконечной конечнопорожденной гиперболической группы существует такое конечное порождающее множество X, что в группе G нет тупиков относительно X?

2) Пусть G — группа, X — её произвольная конечная система порождающих. Верно ли, что доля тупиков в шаре $B(r) = \{g \in G | |g| \leq r\}$ стремится к 0 при r, стремящемся к бесконечности?

В этой работе описываются все тупики в графе Кэли группы

$$G_4 = \langle x, y | x^3 = y^3 = (xy)^4 = 1 \rangle.$$

Отметим, что эта группа гиперболична, тогда как G_3 — евклидова. Оказалось, что тупики располагаются на некоторой “прямой” в графе Кэли, и хотя их число бесконечно, однако доля их в шаре радиуса r стремится к нулю при r, стремящемся к бесконечности.

Также вычисляются функции роста для гиперболических групп вида:

$$G_k = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^k = 1\rangle, k \geq 4.$$

Кроме этого, дается полное описание тупиков в графе Кэли группы целых чисел по сложению относительно порождающих $p-1$ и p, где $p > 3$ и нечетное.

Автор благодарит В.А. Чуркина за постоянные внимание и помощь при проведении данной работы.

1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА ПРАВИЛ ДЛЯ ГРУППЫ G_4

Введем ряд определений.

Определение 1.1. Пусть A^* — свободная полугруппа с единицей в алфавите A. Фиксируем на A^* некоторый *нетеров линейный порядок* $\leq$. Это означает, что любая строго убывающая последовательность $w_1 > w_2 > w_3 > \ldots$ слов из A^* обрывается на некотором шаге. Предположим, что этот порядок согласован с умножением: $u > v \Longrightarrow uw > vw$, $wu > wv$.

Отметим, что таких порядков на A^* много. Часто используются несколько таких порядков: лексикографический и степенной лексикографический.

Определение 1.2. Любое линейное упорядочивание алфавита $A \cup A^{-1}$ индуцирует *лексикографический порядок*

$u = x_1 \ldots x_n > v = y_1 \ldots y_m \Longleftrightarrow \exists (x_k > y_k$ и $x_i = y_i$ при $i < k)$
и *степенной лексикографический порядок*

$u = x_1 \ldots x_n > v = y_1 \ldots y_m \Longleftrightarrow (n > m)$ или $(n = m$ и $u > v$ в лексикографическом порядке).

Всякая система соотношений $R = \{u_i = v_i | i \in I\}$ определяет факторполугруппу $G = \langle A | R\ \rangle$, которая строится как множество классов эквивалентности $A^*/_{\sim_R}$, причем эквивалентность $\sim_R$ получается как наименьшая согласованная с умножением эквивалентность на A^*, при которой $u_i \sim_R v_i$.

Детальное изучение $\sim_R$ показывает, что достаточно взять сначала мультипликативное, потом транзитивное, затем рефлексивное и симметричное замыкание пар (u_i, v_i).

Мы пишем $u \to v$, если существуют слова w_1, w_2 над A, и правило $u_i = v_i$, такие что $u = w_1 u_i w_2, v = w_1 v_i w_2$.

Таким образом, отношение $\to$ является мультипликативным замыканием отношения $\sim_R$.

Обозначим соответственно: $\to^+$ — транзитивное замыкание $\to$, $\to^*$ — транзитивное и рефлексивное замыкание $\to$, $\leftrightarrow^*$ — транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание $\to$.

Таким образом, получаем, что два слова r и r' эквивалентны тогда и только тогда, когда существует слово w и конечные, возможно пустые, цепочки замен вида $au_ib \to av_ib$ такие, что

$$w \to w_1 \to \ldots \to r,$$

$$w \to w_1' \to \ldots \to r'.$$

Определение 1.3. Нётеровость порядка обеспечивает конечность цепочек замен. Заменяя, мы добираемся до слова, к которому замены невозможно применить. Назовем такое слово *несократимым.*

Определение 1.4. Систему соотношений R назовем *полной* относительно указанного нётерового порядка, если в каждом классе R-эквивалентности содержится единственное несократимое слово. Это означает, в частности, что любой способ сокращения слова w приведет к "остатку" — единственному несократимому слову r:

$$w \to w_1 \to \ldots \to r,$$

$$w \to w_1' \to \ldots \to r.$$

Но самое важное состоит в том, что можно конструктивно определить для любых слов R — эквивалентны они или нет. Для этого достаточно некоторым способом вычислить R-остатки и сравнить их.

Определение 1.5. Полная система соотношений полугруппы G относительно нетерового порядка называется системой *Кнута-Бендикса* полугруппы G.

Кнут и Бендикс (см, например, [7]) показали, как из произвольной системы соотношений выстроить полную относительно данного нётерового порядка. К сожалению, полная система соотношений часто бесконечна. Тем не менее, для многих групп существует конечная система Кнута-Бендикса относительно некоторого нетерового порядка. Таковы, например, гиперболические группы. Так как группа G_4 гиперболическая, то для нее можно построить систему Кнута-Бендикса.

Группа G_4 задаётся двумя порождающими x, y и определяющими соотношениями $x^3 = y^3 = 1, (xy)^4 = 1$.

Любой элемент группы G_4 можно представить в виде слова над алфавитом $\mathrm{A} = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$.

Введем степенной лексикографический порядок на данном алфавите $\mathrm{A} = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$: $\mathrm{x} < \mathrm{y} < \mathrm{x}^{-1} < \mathrm{y}^{-1}$. Построим для группы G_4 систему правил Кнута-Бендикса:

1)	$xx^{-1} = 1,$	2)	$x^{-1}x = 1,$
3)	$yy^{-1} = 1,$	4)	$y^{-1}y = 1,$
5)	$xx = x^{-1},$	6)	$x^{-1}x^{-1} = x,$
7)	$yy = y^{-1},$	8)	$y^{-1}y^{-1} = y,$
9)	$y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1} = xyxy,$	10)	$x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = yxyx,$
11)	$yxyxy^{-1} = x^{-1}y^{-1}x^{-1}y,$	12)	$y^{-1}xyxy = yx^{-1}y^{-1}x^{-1},$
13)	$x^{-1}yxyx = xy{-}1x^{-1}y^{-1},$	14)	$xyxyx^{-1} = y^{-1}x^{-1}y^{-1}x,$
15)	$xyxyx = y^{-1}x^{-1}y^{-1},$	16)	$yxyxy = x^{-1}y^{-1}x^{-1},$

Учитывая 1)—16), отметим, что любой элемент группы G_4 можно представить в виде слова над алфавитом $\mathrm{A} = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$, не содержащего подслов вида левых частей равенств 1)—16).

Теорема 1.1. *Система правил 1)—16) для группы G_4 является полной.*

Доказательство. В доказательстве теоремы используется следующая лемма, доказанная в [2].

Лемма 1.1. *Пусть R — множество правил для группы G. Обозначим $u, v, w, \mathrm{y}, u', v', y'', \mathrm{y}'$ — слова над* A.

Множество правил R полное тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия.

1) Пусть $w \neq 1$ и $uw = u', wv = v'$ — правила в R. Тогда существует слово t над A и сокращения , такие что:

$$uwv \to u'v \to^* t,$$

$$uwv \to uv' \to^* t.$$

2) Пусть $\mathrm{y} = \mathrm{y}'$ и $u\mathrm{y}v = \mathrm{y}''$ — правила в R. Тогда существует слово t над A *и сокращения, такие что:*

$$uyv \to uy'v \to^* t,$$

$$uyv \to y'' \to^* t.$$

Переходим к доказательству теоремы.

Из леммы следует, что конечное множество правил может быть алгоритмически проверено на полноту, следующим образом.

Необходимо рассмотреть каждую пару правил, проверить, в каком случае их левые части могут пересекаться (включая пересечение правила самого с собой). Затем применить сокращения к соответствующим словам, пока не получим несократимые слова t и t'.

Если для любых пар пересекающихся правил $t = t'$, то множество правил — полное, в противном случае — неполное.

Реализация:

1. Найдем пары правил, которые пересекаются

$\diamond$ по одной букве:

1) и 2), 1) и 5), 1) и 13), 1) и 15) (пересекаются по x),
2) и 1), 2) и 6), 2) и 9), 2) и 14) (пересекаются по x^{-1}),
3) и 4), 3) и 7), 3) и 12), 3) и 16) (пересекаются по y),
4) и 3), 4) и 8), 4) и 10), 4) и 11) (пересекаются по y^{-1});

$\diamond$ по двум буквам:

9) и 9) (пересекаются по $y^{-1}x^{-1}$),
10) и 10) (пересекаются по $x^{-1}y^{-1}$),
11) и 13), 11) и 15) (пересекаются по yx),
14) и 12), 14) и 16) (пересекаются по xy),
15) и 12), 15) и 16) (пересекаются по xy);

$\diamond$ по трем буквам:

9) и 10) (пересекаются по $y^{-1}x^{-1}y^{-1}$),
10) и 9) (пересекаются по $x^{-1}y^{-1}x^{-1}$),
11) и 12), 11) и 16) (пересекаются по yxy),
16) и 12), 16) и 16) (пересекаются по yxy),
14) и 13), 14) и 15) (пересекаются по xyx),
15) и 13), 15) и 15) (пересекаются по xyx);

$\diamond$ по четырем буквам:

11) и 15), 11) и 13) (пересекаются по $yxyx$),
16) и 15), 16) и 13) (пересекаются по $yxyx$),
14) и 12), 14) и 16) (пересекаются по $xyxy$),
15) и 12), 15) и 16) (пересекаются по $xyxy$).

Других пересечений нет.

2. Теперь два пересекающихся правила вида $uw = u', wv = v'$ сводим к несократимому слову: с одной стороны

$$uwv \to u'v \to^* t,$$

с другой

$$uwv \to uv' \to^* t'.$$

Требуется доказать, что $t = t'$ для любой пары пересекающихся правил.

Рассмотрим, например, пару правил 11) и 13), которые пересекаются по yx.

С одной стороны

$$\text{x}^{-1}yxyxyxy^{-1} \to xy^{-1}x^{-1}y^{-1}yxy^{-1} \to xy^{-1}x^{-1}xy^{-1} \to xy^{-1}y^{-1} \to$$

$\to xy = t$,

с другой

$$\text{x}^{-1}yxyxyxy^{-1} \to x^{-1}yxx^{-1}y^{-1}x^{-1}y \to x^{-1}yy^{-1}x^{-1}y \to x^{-1}x^{-1}y \to$$

$\to xy = t'$.

То есть получили, что $t = t'$.

Для других пересекающихся пар правил также $t = t'$. Вычисления занимают около 4-х страниц, поэтому мы их опускаем.

Таким образом, построенная система правил 1)-16) для группы G_4 является полной, и теорема 1.1 доказана.

2. ГРАФ КЭЛИ ГРУППЫ G_4 И ТУПИКИ

Определение 2.1. Пусть G — группа с n порождающими $x_1, \ldots, x_n$. Граф Кэли группы G представляет собой граф с направленными помеченными ребрами, метки — порождающие группы, вершины — элементы группы. При этом, если $g_1, g_2 \in G$, то в графе существует направленное ребро от g_1 к g_2, если и только если $g_1 x_i = g_2$.

В статье Богопольского О.В. [1] было замечено, что в графе Кэли относительно некоторой конечной системы порождающих могут быть тупики.

Определение 2.2. Пусть G — группа, тогда элемент $g \in G$. g — *тупик* в графе Кэли группы G относительно конечной системы порождающих A, если имеет место неравенство $|ga| \leq |g|$ для любого $a \in A \cup A^{-1}$.

На графе Кэли группы тупики соответствуют вершинам, из которых нет выхода по ребру с увеличением длины элемента.

Так как группа $G_4 = \langle x, y | x^3 = y^3 = (xy)^4 = 1 \ \rangle$ является гиперболической, то граф Кэли группы G_4 может быть “хорошо” расположен в открытом круге — модели Пуанкаре, где “прямые” представляют собой диаметры и полуокружности, перпендикулярные границе круга, а сумма углов в треугольнике меньше π.

На рис. 2.1 изображен граф Кэли группы G_4, полученный с помощью программы, автором которой является Джоэл Кастелланос [6]. Программа размещена в сети Internet [8]. Все тупики располагаются на “прямой”, проходящей через единицу. Тупики помечены символом t.

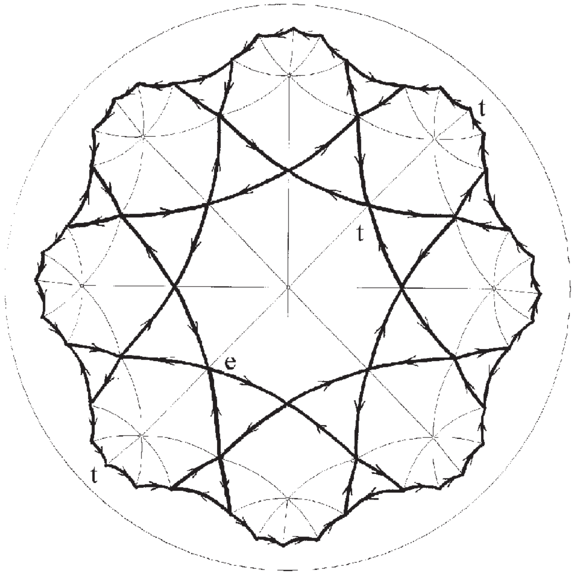

Рис. 2.1. Граф Кэли группы G_4

3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТУПИКОВ В ГРУППЕ G_4

По прежнему для любого элемента g обозначим $|g|$ длину кратчайшего слова в алфавите A, представляющего элемент g.

Лемма 3.1. *Элементы* $xyxy, yxyx$ *являются тупиками над алфавитом* A.

Доказательство. Непосредственно проверяем, что длины не увеличиваются при умножении справа на элементы из A, используя 1)–16).

Случай 1. Для слова $xyxy$ имеем:
$(xyxy)y = xyxy$,
$(xyxy)y^{-1} = xyx$,
$(xyxy)x = y^{-1}x^{-1}y$,

$(xyxy)x^{-1} = (xyxyx)x = y^{-1}x^{-1}y^{-1}x.$

Случай 2. Аналогично имеем равенства:

$(yxyx)x = yxyx,$

$(yxyx)x^{-1} = yxy,$

$(yxyx)y = x^{-1}y^{-1}x^{-1},$

$(yxyx)y^{-1} = (yxyxy)y = x^{-1}y^{-1}x^{-1}y.$

Таким образом, лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $g \in G, q = xyxy, q' = yxyx$. Тогда g является тупиком в том и только том случае, когда g можно представить в виде:*

$g = (qq')^n, g = (q'q)^n, g = q'(qq')^n, g = q(q'q)^n$, *где $n \in N$.*

Доказательство. Пусть $g = (q'q)^n$. Докажем, что g — тупик, то есть $|ga| \leq |g|$ для любого $a \in A = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$.

Найдем длину g. Имеем

$|g| = |(q'q)^n| = |((yxyx)(xyxy))^n| = |(xyxy)(yxyx)\dots(yxyx)(xyxy)| =$
$= |yxyx^{-1}yxy^{-1}\dots y^{-1}xyx^{-1}yxy| = 8n - (2n-1) = 6n+1$, так как последнее слово несократимо относительно правил 1)–16).

Рассматривая различные возможные значения a, покажем, что длина g не увеличивается при умножении на a.

1) $a = y$.

Заметим, что $(q'q)^n = wy$, где wx в несократимом виде.

Поэтому $|g| = |(q'q)^n| = |w| + 1$.

$|gy| = |wy \cdot y| = |wy^{-1}| = |w + 1| = |g|$ по правилу 7).

2) $a = y^{-1}$.

$|gy^{-1}| = |wy \cdot y^{-1}| = |w| < |w| + 1 = |g|$ по правилу 3).

3) $a = x$.

Заметим, что $(q'q)^n = vx^{-1}yxy$, где $vx^{-1}yxy$ в несократимом виде.

Поэтому $|(q'q)^n| = |vx^{-1}yxy| = |v| + 4$.

$|gx| = |vx^{-1}yxy \cdot x| = |vxy^{-1}x^{-1}y^{-1}| = |v| + 4 = |g|$ по правилу 13).

4) $a = x^{-1}$.

Доказываем индукцией по n. При $n = 1$ имеем $|(yxyx)(xyxy)| = 7$ и
$|(q'q)x^{-1}| = |(yxyx)(xyxy)x^{-1}| = |yxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x| =$
$= |x^{-1}y^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}x| = 7$ по правилам 14) и 11).

Пусть теорема верна при $n - 1$.

Требуется доказать, что $|((q'q))^n x^{-1}| \leq |(q'q)| = 6n+1$. Имеем

$$\begin{array}{rcl} |((q'q))^n x^{-1}| & = & |((q'q))^{n-1} q'qx^{-1}| \\ & = & |((q'q))^{n-1} x^{-1}y^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}x| \\ & = & |(((q'q))^{n-1}x^{-1})y^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}x| \\ & \leq & |((q'q))^{n-1}x^{-1}| + |y^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}x| \\ & \leq & |(q'q))^{n-1}| + 6 = 6n+1 \end{array}$$

(использованы правила 14) и 11) и индукционный переход).

Таким образом $|ga| \leq |g|$ для любого $a \in A = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$, то есть $g = (q'q)^n$ — тупик. Для $g = (qq')^n, g = q'(qq')^n, g = q(q'q)^n$, где $n \in N$, рассуждение проводится аналогично.

Теперь докажем обратное утверждение.

Предположим, что g — такой тупик, что $|g| > 4$ и что элемент записан в несократимом виде. Не уменьшая общности, можно считать, что g заканчивается на y, то есть $g = w_1 y$. Случай, когда g заканчивается на x, симметричен данному.

Заметим, что w_1 не может быть пустым, так как $|g| > 4$. Поэтому $g = w_2 h y$.

Каким может быть h? Ниже рассмотрены все возможные варианты. После ответа на поставленный вопрос мы переходим к следующему этапу доказательства, где возникает аналогичный вопрос. В целях упрощения обозначений в записях слов используется одна и та же буква h.

Этап 1.

а) $h = y$, тогда $g = w_2 yy = w_2 y^{-1}$ по правилу 7) — противоречие с несократимостью g;

б) $h = y^{-1}$, $g = w_2 y^{-1} y = w_2$ по правилу 3) — противоречие с несократимостью g;

в) $h = x^{-1}$, $g = w_2 x^{-1} y$ — противоречие с тем, что g — тупик, так как при умножении на x^{-1} имеем $gx^{-1} = w_2 x^{-1} y x^{-1}$ и нет правил, левые части которых оканчиваются на $x^{-1}yx^{-1}$. Следовательно, длина увеличивается.

Отсюда

г) $h = x$ и $g = w_2 xy$, где w_2 не пусто, так как $|g| > 4$, то есть $g = w_3 hxy$.

Этап 2.

а) $h = x$, тогда $g = w_3 xxy = w_3 x^{-1} y$ по правилу 5) — противоречие с несократимостью g;

б) $h = x^{-1}$, $g = w_3x^{-1}xy = w_3y$ по правилу 2) — противоречие с несократимостью g;

в) $h = y^{-1}$, $g = w_3y^{-1}xy$ — при умножении на x^{-1} длина увеличивается, так как нет правил, левые части которых оканчиваются на $y^{-1}xyx^{-1}$, то есть противоречие с тем, что g — тупик.

Следовательно,

г) $h = y$ и $g = w_3yxy$, где w_3 не пусто, так как $|g| > 4$, то есть $g = w_4hyxy$.

Этап 3.

а) $h = y$, тогда $g = w_4yyxy = w_4y^{-1}xy$ по правилу 7) — противоречие с несократимостью g;

б) $h = y^{-1}$, $g = w_4y^{-1}yxy = w_4xy$ по правилу 4) — противоречие с несократимостью g;

в) $h = x$, $g = w_4xyxy$.

Если w_4 не пусто, $g = w_5hxyxy$ сократимо для любого $h \in$ A. Следовательно, w_4 пусто и $g = xyxy = q$;

г) $h = x^{-1}$ и $g = w_4x^{-1}yxy$, где w_4 не пусто. Иначе при умножении на x^{-1} длина увеличивается, так как нет правил, левые части которых заканчиваются на $x^{-1}yxyx^{-1}$, т. е. $g = w_5hx^{-1}yxy$, и т.д.

Заметим, что проделав все три этапа, таких, что на очередном этапе однозначно восстанавливается буква, стоящая перед уже известным "хвостом", получаем $g = q$. Затем, аналогично, получаем $g = q'q$, затем $g = q(q'q)$, и т.д.

Проведем построение по индукции.

Пусть на $(k-1)$ применении трех шагов построили:
$g = (q'q)^{3(k-1)/2-1}$, или, если строить дальше
$g = wy^{-1}xyxq(q'q)^{3(k-1)/2-1}$. За три вышеописанных шага восстанавливаем буквы:

1. $g = w'hy^{-1}xyxq(q'q)^{3(k-1)/2-1}$, $h = x$.
2. $g = w''hxy^{-1}xyxq(q'q)^{3(k-1)/2-1}$, $h = y$.
3. $g = w'''hyxy^{-1}xyxq(q'q)^{3(k-1)/2-1}$, $h =$ x, w''' — не пусто, поэтому $g = yxy^{-1}xyxq(q'q)^{3(k-1)/2-1} = q(q'q)^{3(k-1)/2-1}$, $h = x$ и строим дальше.

То есть получили на k применении наших трех шагов требуемое слово $q(q'q)^{3(k-1)/2-1}$. Таким образом, теорема 3.1 доказана.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РОСТА ДЛЯ ГРУПП G_k, $k \geq 4$

Группы G_k задаются системой порождающих $A = \{x, y\}$ и определяющими соотношениями $x^3 = y^3 = 1, (xy)^k = 1$. При $k \geq 4$ группы являются гиперболическими.

Любой элемент группы G_k можно представить в виде слова над алфавитом $A \cup A^{-1}$.

Теорема 4.1. *Пусть $g \in G_4$, тогда g является тупиком в графе Кэли группы G_4 относительно системы порождающих $A = \{x, y\}$ в том и только том случае, когда g имеет один из видов:*

$$g = xyx(y^{-1}xyx^{-1}yx)^n y^{-1}xyx;$$

$$g = xyx(y^{-1}xyx^{-1}yx)^n y;$$

$$g = yxy(x^{-1}yxy^{-1}xy)^n x^{-1}yxy;$$

$$g = yxy(x^{-1}yxy^{-1}xy)^n x,$$

где $n \in N$.

Теорема 4.2. *Пусть $g \in G_k$, $k \geq 4$ — четное, тогда g является тупиком в графе Кэли группы G_4 относительно системы порождающих $A = \{x, y\}$ в том и только том случае, когда g имеет один из видов:*

$$g = (xy)^{\frac{k}{2}-2}x(y^{-1}(xy)^{\frac{k}{2}-2}x^{-1}(yx)^{\frac{k}{2}-2})^n y^{-1}(xy)^{\frac{k}{2}-2}x;$$

$$g = (xy)^{\frac{k}{2}-2}x(y^{-1}(xy)^{\frac{k}{2}-2}x^{-1}(yx)^{\frac{k}{2}-2})^n y;$$

$$g = (yx)^{\frac{k}{2}-2}y(x^{-1}(yx)^{\frac{k}{2}-2}y^{-1}(xy)^{\frac{k}{2}-2})^n x^{-1}(yx)^{\frac{k}{2}-2}y;$$

$$g = (yx)^{\frac{k}{2}-2}y(x^{-1}(yx)^{\frac{k}{2}-2}y^{-1}(xy)^{\frac{k}{2}-2})^n x,$$

где $n \in N$.

Теорема 4.3. *Пусть $g \in G_k$, $k \geq 4$ — нечетное, тогда g является тупиком в графе Кэли группы G_k относительно системы порождающих*
$A = \{x, y\}$ в том и только том случае, когда g имеет один из видов:

$$g = (xy)^{\frac{k-1}{2}}(x^{-1}y(xy)^{\frac{k-3}{2}})^n x;$$

$$g = (yx)^{\frac{k-1}{2}}(y^{-1}x(yx)^{\frac{k-3}{2}})^n y,$$

где $n \in N$.

Теорема 4.1 была доказана выше. Теорема 4.2 и теорема 4.3 доказываются подобным образом, с помощью построения полной системы правил Кнута-Бендикса для групп. Так как группы G_k гиперболические при $k \geq 4$, то для них можно построить конечную систему Кнута-Бендикса.

Доказательства теорем 4.2 и 4.3 опускаются из-за их громоздкости.

Обозначим через $\sigma(n)$ число элементов длины n в графе Кэли группы. Очевидно, $\sigma(n)$ зависит от системы порождающих.

Теорема 4.4. *Количество элементов* $\sigma(n)$ *длины* n *в графе Кэли групп*
$G_k = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^k = 1 \rangle$, $k \geq 4$ *вычисляется по формуле:*

$$\sigma(0) = 1,$$
$$\sigma(1) = 4,$$
$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma(n-1)2 - 2, \text{ если } n = (k-1) \cdot l + 1, \\ \sigma(n-1)2 - 4, \text{ если } n = (k-1) \cdot l + 2, \\ \sigma(n-1)2, \quad \text{ если } n \neq (k-1)l + 1, (k-1)l + 2, \end{cases} \qquad n \geq 2, \ l, n \in N.$$

Доказательство. Рассмотрим граф Кэли группы G_4 (см. рис 4.1).

Соотношения $x^3 = y^3 = 1$ на графе соответствуют треугольникам, соотношения $(xy)^4 = 1$ — восьмиугольникам. Каждая вершина в графе обозначена числом, равным расстоянию от начальной вершины.

Обозначим
$g_1 = xyx(y^{-1}xyx^{-1}yx)^n y^{-1}xyx$;
$g_2 = xyx(y^{-1}xyx^{-1}yx)^n y$;
$g_3 = yxy(x^{-1}yxy^{-1}xy)^n x^{-1}yxy$;
$g_4 = yxy(x^{-1}yxy^{-1}xy)^n x$.

По теореме 4.1 g_1, g_2, g_3, g_4 являются тупиками в графе Кэли относительно системы порождающих $A = \{x, y\}$.

Тупики располагаются на прямой. Их длины: $|g_1| = |g_3| = 7 + 6n$, $|g_2| = |g_4| = 4 + 6n$, $n \in N$. Таким образом, они расположены на расстоянии $3l + 1$, $l \in N$ от начальной вершины.

Назовем "предтупиковыми" вершинами — те вершины в графе Кэли, из которых при увеличении длины на 1 можно попасть в две вершины, одна из которых — тупик.

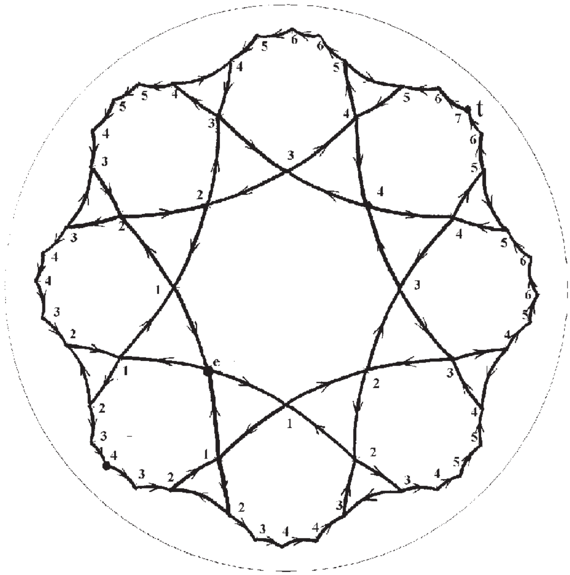

Рис. 4.1. Граф Кэли группы G_4 с помеченными длинами

Эти вершины соответствуют словам:
$xyx(y^{-1}xyx^{-1}yx)^n y^{-1}xy$;
$xyx(y^{-1}xyx^{-1}yx)^n$;
$yxy(x^{-1}yxy^{-1}xy)^n x^{-1}yx$;
$yxy(x^{-1}yxy^{-1}xy)^n$; $x^{-1}y^{-1}x^{-1}(yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1})^n yx^{-1}y^{-1}$;
$x^{-1}y^{-1}x^{-1}(yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1})^n$;
$y^{-1}x^{-1}y^{-1}(xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1})^n xy^{-1}x^{-1}$;
$y^{-1}x^{-1}y^{-1}(xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1})^n$.

Очевидно, они имеют длину на 1 меньше, чем длины тупиков, в который из них можно попасть.

Обозначим через $\sigma(n)$ — количество вершин, находящихся на сфере радиуса n (то есть множество вершин, удаленных на расстояние n от начальной вершины).

Из каждой вершины, не являющейся "тупиковой" и "предтупиковой", с увеличением длины на 1 выходят два ребра. Эти вершины имеют номера, не равные $3l$ и $3l+1$. Поэтому $\sigma(n) = \sigma(n-1) \cdot 2$, если $n - 1 \neq 3l, 3l+1$.

Тупиковые вершины есть только на сфере радиуса $3l+1$, на каждой такой сфере их всего два.

"Предтупиковые" вершины находятся на сфере радиуса $3l$, на каждой сфере их по четыре. Две "предтупиковые" вершины из четырех ведут в один тупик, две другие — в другой тупик. Поэтому из двух "предтупиковых" вершин выходят с увеличением длины не четыре ребра (по два ребра из каждой) как из "обычных" вершин, а всего три.

Отсюда $\sigma(n) = \sigma(n-1) \cdot 2 - 2$, при $n - 1 = 3l$.

Из тупиковых вершин с увеличением длины не выходит ни одного ребра, и так как их на сфере радиуса $3l + 1$ всего две, то
$\sigma(n) = \sigma(n-1) \cdot 2 - 4$, где $n - 1 = 3l + 1$.

Таким образом, получили:

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= 1, \\ \sigma(1) &= 4, \\ \sigma(n) &= \begin{cases} \sigma(n-1)2-2, & \text{если } n = 3\cdot l+1, \\ \sigma(n-1)2-4, & \text{если } n = 3\cdot l+2, \\ \sigma(n-1)2, & \text{если } n \neq 3l+1, 3l+2, \end{cases} \qquad n \geq 2, \quad l, n \in N. \end{aligned}$$

Тупики в графе Кэли $G_k = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^k = 1\rangle$, $k > 4$, k — четное (так же, как в графе Кэли для группы G_4) располагаются на прямой, на расстоянии $(k-1)l + 1$ от начальной вершины (учитывая теорему 4.2).

На сфере радиуса $(k-1)l$ располагаются четыре "предтупиковых" вершины, из которых с увеличением длины выходит три ребра.

На сфере радиуса $(k-1)l + 1$ располагается два тупика.

Отсюда $\sigma(n)$ для группы $G_k = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^k = 1\rangle$, $k > 4$, k — четное:

$$\begin{aligned} &\sigma(0) = 1, \\ &\sigma(1) = 4, \\ &\sigma(n) = \begin{cases} \sigma(n-1)2-2, & \text{если } n = (k-1)\cdot l+1, \\ \sigma(n-1)2-4, & \text{если } n = (k-1)\cdot l+2, \\ \sigma(n-1)2, & \text{если } n \neq (k-1)l+1, (k-1)l+2, \end{cases} \qquad n \geq 2, \quad l, n \in N. \end{aligned}$$

Тупики в графе Кэли $G_k = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^k = 1\rangle$, $k \geq 5$, k — нечетное располагаются на прямой, на расстоянии $(k-1)l + 1$ от начальной вершины (учитывая теорему 4.3).

Аналогично случаю, когда k — четное, получаем $\sigma(n)$ для группы $G_k = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^k = 1\rangle$, $k > 4$, k — нечетное:

$$\sigma(0) = 1,$$
$$\sigma(1) = 4,$$
$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma(n-1)2 - 2, \text{если } n = (k-1)\cdot l + 1, \\ \sigma(n-1)2 - 4, \text{если } n = (k-1)\cdot l + 2, \\ \sigma(n-1)2, \qquad \text{если } n \neq (k-1)l + 1, (k-1)l + 2, \end{cases} \qquad n \geq 2, \quad l, n \in N.$$

Теорема 4.4 доказана.

Обозначим через Σ функцию роста группы. Существуют конечно-порожденные группы, для которых функция роста является трансцендентной.Однако во многих примерах Σ —рациональная функция. В [4] установлено, что функция роста групп Кокстера является рациональной при определенных системах порождающих. Аналогичное утверждение доказано в [5] для групп поверхностей.

Теорема 4.5. *Функция роста для группы G_k, $k \geq 4$ рациональна и имеет вид:*

$$\Sigma(n) = \frac{(1+2z)(1-z^{k-1}) - 2z^k - 4z^{k+1}}{(1-z^{k-1})(1-2z)}.$$

Доказательство. В [3] было доказано, что $\Sigma(n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sigma(n) z^n$, где $\sigma(n)$ — количество элементов длины n.

По теореме 4.4 количество вершин на сфере радиуса n в графе Кэли группы G_k, $k \geq 4$ задается формулой:

$$\sigma(0) = 1,$$
$$\sigma(1) = 4,$$
$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma(n-1)2 - 2, \quad \text{если } n = (k-1)\cdot l + 1, \\ \sigma(n-1)2 - 4, \quad \text{если } n = (k-1)\cdot l + 2, \\ \sigma(n-1)2, \qquad \text{если } n \neq (k-1)l + 1, (k-1)l + 2, \end{cases} \qquad n \geq 2, \quad l, n \in N.$$

Вычислим функцию роста группы G_k:

$$\begin{aligned}
\Sigma(n) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sigma(n)z^n = \sigma(0)+\sigma(1)\cdot z+\sum_{n=2}^{\infty}\sigma(n)z^n \\
&= 1+4z+\sum_{n=2}^{\infty}\sigma(n)z^n = 1+4z+z\sum_{n=2}^{\infty}\sigma(n)z^{n-1} \\
&= 1+4z+z\left(\sum_{n=2}^{\infty}\sigma(n-1)2z^{n-1}-\sum_{l\geq 1}2z^{(k-1)l}-\sum_{l\geq 1}4z^{(k-1)l+1}\right) \\
&= 1+4z+2z\sum_{n\geq 2}\sigma(n-1)z^{n-1}-2z\sum_{l\geq 1}z^{(k-1)l}-4z^2\sum_{l\geq 1}z^{(k-1)l} \\
&= 1+4z+2z\sum_{n\geq 2}\sigma(n-1)z^{n-1}-2z\frac{z^{k-1}}{1-z^{k-1}}-4z^2\frac{z^{k-1}}{1-z^{k-1}} \\
&= 1+4z+2z\Sigma(z)-2z-\frac{2z^k}{1-z^{k-1}}-\frac{4z^{k+1}}{1-z^{k-1}} \\
&= \frac{(1+2z)(1-z^{k-1})-2z^k-4z^{k+1}}{1-z^{k-1}}+2z\Sigma(z)
\end{aligned}$$

Отсюда находим $\Sigma(n)$:

$$\Sigma(n) = \frac{(1+2z)(1-z^{k-1})-2z^k-4z^{k+1}}{(1-z^{k-1})(1-2z)}.$$

Теорема 4.5 доказана.

5. О ПРОДОЛЖЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ГРАФЕ КЭЛИ ГРУППЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПО СЛОЖЕНИЮ

Фиксируем в группе целых чисел Z по сложению порождающее множество A, состоящее из двух чисел $p-1$ и p, где р — нечетное, $p>3$. Любое $c\in Z$ можно представить в виде $c=px+(p-1)y$, где $x,y\in Z$.

Определение 5.1. Назовем *длиной* элемента c относительно порождающего множества A число

$$|g|_A = min\{|x|+|y| : c=px+(p-1)y;\ x,y\in Z\}.$$

Наша цель — найти длину элемента относительно заданного порождающего множества. Мы рассматриваем, ввиду симметричности, только элементы больше нуля. Как обычно, целую часть вещественного числа x обозначаем через $[x]$.

Теорема 5.1 (вычисление длины элемента группы). *Пусть Z — группа целых чисел по сложению, $A = \{p-1, p\}$ — система порождающих для Z, $p > 3$ и $c \in Z$ такой, что $c > 0$. Пусть*
$c = [c/p]p + r$, где $0 \le r < p$. Тогда

1) $|c|_A = [c/p]$, если $r = 0$;

2) $|c|_A = |1 - p + [c/p] + r| + p - r$, если $\frac{r}{p} \ge \frac{1}{2}$;

3) $|c|_A = [c/p] + 1$, если $0 < \frac{r}{p} < \frac{1}{2}$ и $1 - p + [c/p] + r \ge 0$;

4) $|c|_A = 2p - 2r - [c/p] - 1$, если $0 < \frac{r}{p} < \frac{1}{2}$, $1 - p + [c/p] + r \le 0$,
$\frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]}{2} + 1 \le r$ при $[c/p]$ четном,
$\frac{p-1}{2} - \frac{([c/p]+1)}{2} + 1 \le r$ при $[c/p]$ нечетном;

5) $|c|_A = [c/p] + 2r$, если $0 < \frac{r}{p} < \frac{1}{2}$, $1 - p + [c/p] + r \le 0$,
$r \le \frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]}{2}$ при $[c/p]$ четном,
$r \le \frac{p-1}{2} - \frac{([c/p]+1)}{2}$ при $[c/p]$ нечетном.

Доказательство. Найдем общее решение уравнения $c = px + (p-1)y$ в целых числах.

Пусть

$$\text{c} = px + (p-1)y,$$

тогда

$$-y \equiv c \pmod p,$$

$$x = \frac{c - (p-1)y}{p}.$$

Решая сравнение $-y \equiv c$ $(mod\ p)$ [5], находим:
$y \equiv -r \pmod p$, $0 \le r < p$; то есть $y = pt - r$, где $t \in Z$.

Отсюда находим:
$x = \frac{c-(p-1)y}{p} = \frac{[c/p]p+r-(p-1)(pt-r)}{p} = \frac{[c/p]p+r-p^2t+pr+pt-r}{p} = [c/p] - pt +$
$+ r + t = (1-p)t + [c/p] + r$.

Таким образом,

$$c = p((1-p)t + [c/p] + r)) + (p-1)(pt - r),$$

и длина c относительно порождающего множества $A = \{p-1, p\}$ вычисляется по формуле

$$|c|_A = \min_{t \in Z}\{|(1-p)t + [c/p] + r)| + |pt - r|\}.$$

Нарисуем графики функций $|x| = |(1-p)t + [c/p] + r|$ и $|y| = |pt - r|$.

На рис. 5.1 график функции $|y|$ изображен пунктирной линией, $|x|$ — сплошной.

Так как $0 \le r < p$, то $0 \le \frac{r}{p} < 1$. Легко видеть, что $\frac{[c/p]+r}{p-1} > \frac{r}{p}$.

Если бы значения аргумента t были произвольными вещественными числами, то, учитывая скорости возрастания и убывания графиков этих функций (т. е. модули коэффициентов при t), минимум $|x|+|y|$ достигался бы в точке $\frac{r}{p}$. Так как $t \in Z$, то минимум может достигаться в ближайших к точке $\frac{r}{p}$ целочисленных точках, то есть при $t = 0$ и $t = 1$, ввиду монотонности $|x| + |y|$ слева и справа от точки $\frac{r}{p}$.

При $t = 0$ имеем $|x| = [c/p] + r$, $|y| = r$, и $|x| + |y| = [c/p] + 2r$.

При $t = 1$ $|x| = |1 - p + [c/p] + r|$, $|y| = p - r$, и $|x| + |y| = = |1 - p + [c/p] + r| + p - r$.

В частности, если $r = 0$, то $|c|_A = (|x| + |y|)\,|_{t=0} = [c/p]$.

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1 : $\frac{r}{p} \ge \frac{1}{2}$.

Из рис. 5.2 видно, что при $t = 1$ значение $|x| + |y|$ меньше, чем при $t = 0$, то есть минимум достигается при $t = 1$. Таким образом, при $\frac{r}{p} \ge \frac{1}{2}$ имеем

$$min\{|x| + |y|\} = |1 - p + [c/p] + r| + p - r.$$

Случай 2 : $0 < \frac{r}{p} < \frac{1}{2}$.

Если $1-p+[c/p]+r \ge 0$, то $(|x|+|y|)\,|_{t=1} = 1-p+[c/p]+r+p-r = = [c/p] + 1 < [c/p] + 2r = (|x| + |y|)\,|_{t=0}$. Поэтому минимум достигается при $t = 1$ и равен $[c/p] + 1$.

Если $1-p+[c/p]+r \le 0$, то $(|x|+|y|)\,|_{t=1} = -1+p-[c/p]-r+p-r = = 2p - 2r - [c/p] - 1$, $(|x| + |y|)\,|_{t=0} = [c/p] + 2r$.

Если минимум достигается $t = 1$, то

$$2p - 2r - [c/p] - 1 < [c/p] + 2r.$$

Это неравенство выполняется при $r > \frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]}{2} + \frac{1}{4}$. Так как $r \in Z$ и p нечетное, то при $[c/p]$ четном это неравенство равносильно неравенству

$$r \ge \frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]}{2} + 1,$$

а при $[c/p]$ нечетном равносильно неравенству

$$r \ge \frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]+1}{2} + 1.$$

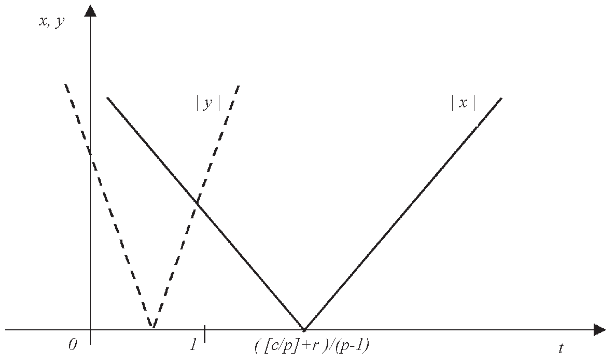

Рис. 5.1. Графики функций $|x| = |(1-p)t + [c/p] + r|$ и $|y| = |pt - r|$

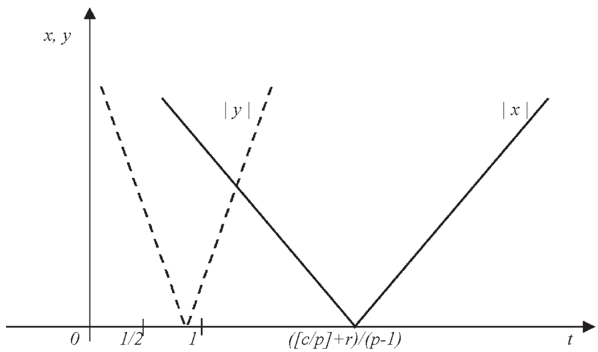

Рис. 5.2. При $t = 1$ значение $|x| + |y|$ меньше, чем при $t = 0$

Аналогично, неравенство $2p-2r-[c/p]-1 > [c/p]+2r$ выполнено при $r < \frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]}{2} + \frac{1}{4}$. Так как $r \in Z$, то это неравенство выполняется при

$$r \leq \frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]}{2},$$

если $[c/p]$ — четное,

$$r \leq \frac{p-1}{2} - \frac{[c/p]+1}{2},$$

если $[c/p]$ — нечетное.

Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.2 (об описании тупиков). Целое число c является тупиком графа Кэли группы Z целых чисел по сложению относительно системы порождающих $A = \{p-1, p\}$ в том и только том случае, когда

$$c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + lp,$$

где $0 \leq k, l \leq \frac{p-3}{2}$, $l = k, k+1$.

Доказательство. Докажем, используя теорему 5.1, что элементы группы Z вида $c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + lp$,
где $0 \leq k, l \leq \frac{p-3}{2}$, $l = k, k+1$ являются тупиками относительно системы порождающих $A = \{p-1, p\}$.

Покажем, что $c = \frac{p-1}{2}$ — тупик, то есть надо проверить, что $|\frac{p-1}{2} \pm p|_A \leq |\frac{p-1}{2}|_A$ и $|\frac{p-1}{2} \pm (p-1)|_A \leq |\frac{p-1}{2}|_A$.

Имеем

$$|\frac{p-1}{2}|_A = p-1$$

по утверждению (5) теоремы 5.1, так как в этом случае $[c/p] = 0$, $r = \frac{p-1}{2}$ и легко проверить, что $\frac{r}{p} < \frac{1}{2}$, $1-p+[c/p]+r \leq 0$.

Далее

$$|\frac{p-1}{2} + p|_A = p-1 = |\frac{p-1}{2}|_A$$

по утверждению (4) теоремы 5.1, так как в этом случае $[c/p] = 1$, $r = \frac{p-1}{2}$ и легко проверить, что $\frac{r}{p} < \frac{1}{2}$, $1-p+[c/p]+r \leq 0$.

Далее

$$|\frac{p-1}{2} - p|_A = |\frac{-p-1}{2}|_A = |\frac{p+1}{2}|_A = p-2 < |\frac{p-1}{2}|_A$$

по утверждению (2) теоремы 5.1, так как здесь $[c/p] = 0$, $r = \frac{p+1}{2}$ и легко проверить, что $\frac{r}{p} > \frac{1}{2}$, $1 - p + [c/p] + r \leq 0$.

Теперь будем прибавлять и вычитать $p - 1$:

$|\frac{p-1}{2} + (p-1)|_A = |p + \frac{p-3}{2}|_A = p - 2 < |\frac{p-1}{2}|_A$,
по утверждению (5) теоремы 5.1, так как в этом случае $[c/p] = 1$, $r = \frac{p-3}{2}$, r и $[c/p]$ удовлетворяют условиям утверждения (5) теоремы 5.1.

Далее $|\frac{p-1}{2} - (p-1)|_A = |\frac{-p+1}{2}|_A = |\frac{p-1}{2}|_A$.

Таким образом, показали, что $\frac{p-1}{2}$ — тупик.

Докажем, что $c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + kp$, где $0 < k \leq \frac{p-3}{2}$, является тупиком. Действительно, $|c|_A = |\frac{p-1}{2} + k(p-1) + kp|_A = |2kp + \frac{p-1}{2} - k|_A = p - 1$, так как $[c/p] = 2k$, $r = \frac{p-1}{2} - k$ и выполняются условия утверждения (5) теоремы 5.1.

Покажем, что $|c \pm p|_A \leq p - 1$ и $|c \pm (p-1)|_A \leq p - 1$.

В самом деле, $|c+p|_A = |(2k+1)p + \frac{p-1}{2} - k|_A = p-1$ по утверждению (4) теоремы 2.1, так как $[c/p] = 2k + 1$, $r = \frac{p-1}{2} - k$, и выполняются условия утверждения (4) теоремы 5.1.

Кроме того $|c - p|_A = |(2k-1)p + \frac{p-1}{2} - k|_A = p - 2 < p - 1$,
так как в этом случае $[c/p] = 2k-1$, $r = \frac{p-1}{2} - k$, r и $[c/p]$ удовлетворяют условиям утверждения (5) теоремы 5.1.

$|c + (p-1)|_A = |(2k+1)p + \frac{p-1}{2} - k - 1|_A = p - 2 < p - 1$,
по утверждению (5) теоремы 6.1, так как $[c/p] = 2k+1$, $r = \frac{p-1}{2} - k - 1$, и выполняются условия утверждения (5) теоремы 5.1.

$|c - (p-1)|_A = |(2k-1)p + \frac{p-1}{2} - k + 1|_A = p - 1$,
так как в этом случае $[c/p] = 2k - 1$, $r = \frac{p-1}{2} - k + 1$, r и $[c/p]$ удовлетворяют условиям утверждения (4) теоремы 5.1.

Таким образом, показали, что $c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + kp$ является тупиком для любого $0 < k \leq \frac{p-3}{2}$.

Докажем, что $c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + (k+1)p$, где $0 < k+1 \leq \frac{p-3}{2}$, является тупиком.

Как было показано выше, $|c|_A = |\frac{p-1}{2} + k(p-1) + (k+1)p|_A = |(2k+1)p + \frac{p-1}{2} - k|_A = p - 1$.

Покажем, что $|c \pm p|_A \leq p - 1$ и $|c \pm (p-1)|_A \leq p - 1$.

Действительно, $|c + p|_A = |(2k+2)p + \frac{p-1}{2} - k|_A = p - 2 < p - 1$
по утверждению (4) теоремы 5.1, так как $[c/p] = 2k + 2$, $r = \frac{p-1}{2} - k$ и выполняются условия утверждения (4) теоремы 5.1.

Кроме того, $|c-p|_A = |2kp + \frac{p-1}{2} - k|_A = p-1$, как было доказано выше.

Далее $|c+(p-1)|_A = |(2k+2)p + \frac{p-1}{2} - k - 1|_A = p-1$ по утверждению (5) теоремы 5.1, так как $[c/p] = 2k+2$, $r = \frac{p-1}{2} - k - 1$ и выполняются условия утверждения (5) теоремы 5.1.

Кроме того, $|c-(p-1)|_A = |2kp + \frac{p-1}{2} - k + 1|_A = p-2 < p-1$, так как в этом случае $[c/p] = 2k$, $r = \frac{p-1}{2} - k + 1$, r и $[c/p]$ удовлетворяют условиям утверждения (4) теоремы 5.1.

Т. е. показали, что $c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + (k+1)p$ является тупиком для любого $0 < k+1 \leq \frac{p-3}{2}$.

Докажем обратное утверждение, т. е. покажем, что кроме чисел $c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + lp$, где $0 \leq k, l \leq \frac{p-3}{2}$, $l = k, k+1$ среди целых чисел нет тупиков относительно системы порождающих $A = \{p-1, p\}$.

Используя теорему 5.1, докажем, что для любого целого c, $c \neq \frac{p-1}{2} + k(p-1) + lp$ найдется $a = \pm p, \pm(p-1)$ такой, что $|c+a|_A > |c|_A$.

Если $0 < c < \frac{p-1}{2}$, то $|c+p|_A > |c|_A$, так как

$$|c+p|_A = [(c+p)/p] + 2r = 1 + 2r > 2r = |c|_A$$

по утверждению (5) теоремы 5.1.

Если $\frac{p-1}{2} < c < p$, то $|c+(p-1)|_A > |c|_A$, так как в этом случае

$$|c|_A = 2p - 2r - 1$$

по утверждению (2) теоремы 5.1,

$$|c+(p-1)|_A = 2p - 2(r-1) - [(c+(p-1))/p] - 1 = 2p - 2r$$

по утверждению (4) теоремы 5.1. Таким образом, $|c+(p-1)|_A > |c|_A$. Т. е. среди чисел c, таких что $0 < c < \frac{p-1}{2}$ или $\frac{p-1}{2} < c < p$, тупиков нет.

Для любого целого c, такого что $(2k-1)p < c < \frac{p-1}{2} + (k-1)(p-1) + kp$, где $1 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$, выполняется

$$|c|_A = [c/p] + 2r = 2k - 1 + 2r$$

по утверждению (5) теоремы 5.1,

$$|c+p|_A = [(c+p)/p] + 2r = 2k + 2r$$

по утверждению (5) теоремы 5.1. Таким образом, $|c+p|_A > |c|_A$ и среди чисел
$(2k-1)p < c < \frac{p-1}{2} + (k-1)(p-1) + kp$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, тупиков нет.

Для любого целого c, такого что
$\frac{p-1}{2} + (k-1)(p-1) + kp < c \le (2k-1)p + p - 2k$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, выполняется

$$|c|_A = 2p - 2r - [c/p] - 1 = 2p - 2r - (2k-1) - 1 = 2p - 2r - 2k,$$

$$|c + (p-1)|_A = 2p - 2(r-1) - [(c + (p-1))/p] - 1 = 2p - 2r - 2k + 1$$

по утверждению (4) теоремы 5.1. Т. е. $|c+(p-1)|_A > |c|_A$, и среди чисел
$\frac{p-1}{2} + (k-1)(p-1) + kp < c \le (2k-1)p + p - 2k$,
где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, тупиков нет.

Для любого целого c, такого что
$(2k-1)p + p - 2k < c < 2kp$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, выполняется

$$|c+p|_A = 2k + 1 > 2k = |c|_A$$

по утверждению (3) теоремы 5.1. Т. е. среди чисел
$(2k-1)p + p - 2k < c < 2kp$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, тупиков нет.

Для любого целого c, такого что
$2kp < c < \frac{p-1}{2} + k(p-1) + kp$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, выполняется

$$|c+p|_A = 2k + 2r + 1 > 2k + 2r = |c|_A$$

по утверждению (5) теоремы 5.1, и, следовательно, среди чисел
$2kp < c < \frac{p-1}{2} + k(p-1) + kp$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, тупиков нет.

Для любого целого c, такого что
$\frac{p-1}{2} + k(p-1) + kp < c \le 2kp + p - 2k$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, выполняется

$$|c|_A = 2p - 2r - [c/p] - 1 = 2p - 2r - 2k - 1,$$

$$|c + (p-1)|_A = 2p - 2(r-1) - [(c + (p-1))/p] - 1 = 2p - 2r - 2k$$

по утверждению (4) теоремы 5.1. Таким образом, $|c + (p-1)|_A > |c|_A$ и среди чисел
$\frac{p-1}{2} + k(p-1) + kp < c \le 2kp + p - 2k$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, тупиков нет.

Для любого целого c, такого что
$2kp + p - 2k < c < (2k+1)p$, где $1 \le k \le \frac{p-3}{2}$, выполняется

$$|c+p|_A = 2k + 2 > 2k + 1 = |c|_A$$

по утверждению (3) теоремы 5.1. Т. е. среди чисел
$2kp + p - 2k < c < (2k+1)p$, где $1 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$, тупиков нет.

Для любого целого c, такого что $(2k-1)p < c$, где $\frac{p-3}{2} \leq k$, $|c|_A$ может быть равен либо $2k+2r-1$, либо $2k$ по утверждению (4), либо (3) теоремы 5.1 соответственно.

Тогда $|c+p|_A$ может быть равен либо $2k+2r$, либо $2k+1$ по утверждению (4), либо (3) теоремы 5.1 соответственно. В обоих этих случаях $|c+p|_A > |c|_A$, следовательно, среди чисел $(2k-1)p < c$, где $\frac{p-3}{2} \leq k$, тупиков нет.

Для любого $c = np$, где $n \in Z$, выполнено

$$|c+p|_A = n+1 > n = |c|_A$$

по утверждению (1) теоремы 5.1. Следовательно, среди чисел $c = np$, где $n \in Z$, тупиков нет.

Таким образом, показали, что любое целое c не равное
$c = \frac{p-1}{2} + k(p-1) + lp$, где $0 \leq k, l \leq \frac{p-3}{2}$, $l = k, k+1$, не является тупиком.

Теорема 5.2 доказана.

Следствие. *Количество тупиков в графе Кэли группы Z относительно порождающего множества $\{p-1, p\}$ равно $p-2$ и, следовательно, стремится к бесконечности с ростом p.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богопольский О.В. Бесконечные соизмеримые гиперболические группы билипшицево эквивалентны // Алгебра и логика — 1997. — Т.36, N3. — С. 259—272.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. — М.: Наука, Главная ред. физ.— мат. литературы, 1981. — 176 с.
3. Григорчук Р.И. Функции роста, переписывающие системы и эйлерова характеристика//Математические заметки — 1995. — Т.58, N5. — С. 653—668.
4. Bourbaki N. Groups et algebres de Lie — Hermann, Paris, 1968.
5. Cannon J.W. The growth of the closed surface groups and the compact hyperbolic Coxeter groups. Preprint. Boston, 1979.
6. Castellanos J., Austin J.D., Damell E., Estrada M. An Empirical Exploration of the Poincare for Hyperbolic Geometry // Mathematics and Computer Education. — 1993. — Vol.27, Nl. — P. 51—68.
7. Epstein D.B.A., Cannon J.W., Holt D.F.,Levy S.V.F., Paterson M.S., Thurston W.P. Word processing in groups — Bartlett and Jones, Boston,1992. — 331 p.
8. http://riceinfo.rice.edu/project/NonEuclid/

М. Ф. Мурзина

О ПРОДОЛЖЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ГРАФАХ КЭЛИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП

Препринт
88

Рукопись поступила в редакцию 11.05.2001
Рецензент В. А. Евстигнеев
Редактор З. В. Скок

Подписано в печать 11.07.2001
Формат бумаги 60×84 1/16 Объем 1,6 уч.-изд.л., 1,8 п.л.
Тираж 50 экз.

НФ ООО ИПО “Эмари” РИЦ, 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 6