Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт систем информатики
им. А. П. Ершова

Р. С. Дубцов

КРИТЕРИИ ЭПИ- И МОНОМОРФИЗМА В КАТЕГОРИЯХ МОДЕЛЕЙ С РЕАЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Препринт
113

Новосибирск 2004

В данной работе исследуются различные свойства параллельных сетевых моделей с реальным временем. Для этого вводятся категории временных сетей-процессов с различными семантиками, в введённых категориях формулируются критерии эпи- и мономорфизмов и выделяются подкатегории, в которых морфизмы удовлетворяют сформулированным свойствам.

Siberian Division of the Russian Academy of Sciences
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems

R. S. Dubtsov

EPI- AND MONOMORPHISM CRITERIA IN CATEGORIES OF REAL-TIME AND CONCURRENT MODELS

Preprint
113

Novosibirsk 2004

The intention of the paper is to study properties of categories of Petri net based models with dense time. To this purpose we define categories of timed net processes, equipped with different semantics. In the categories, we formalize criteria of epi- and monomorphisms. We also extract subcategories of timed net processes whose mophisms satisfy formalized conditions.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие методы теории категорий стали активно использоваться для описания и изучения параллельных систем и процессов [8]. Объекты категорий представляют процессы, а морфизмы соответствуют взаимосвязям между поведениями процессов. Теоретико-категорные методы позволяют классифицировать и унифицировать различные модели параллелизма. Основная идея этого подхода заключается в формальном выражение того факта, что одна модель более выразительна, чем другая в терминах вложений (или прообразов).

Необходимость в разработке и исследовании распределённых систем, функционирующих в режиме реального времени, привела к попыткам ввести понятие времени, чтобы позволить исследовать временные аспекты поведения систем. В литературе параллельные системы, функционирующие в режиме реального времени, часто представляются временными автоматами, содержащими конечное множество счётчиков [2], и алгебрами временных процессов (см., например, [10]). Однако все эти формализмы базируются на интерливинговой семантике и не позволяют моделировать параллелизм естественным образом (напрямую). К временным моделям "истинного параллелизма" относятся временные расширения следующих моделей: структур событий [9], сетей Петри [1, 4], частично-упорядоченных множеств [7], асинхронных систем переходов [3].

В данной работе исследуются свойства различных категорий параллельных сетевых моделей с реальным временем:

- вводятся категории временных сетей-процессов [11] с различными семантиками, позволяющие адекватно моделировать временные аспекты поведения параллельных систем;
- в данных категориях формулируются критерии эпи- и мономорфизмов;
- выделяются подкатегории временных сетей-процессов, в которых любой морфизм является эпи- и мономорфизмом.

Работа состоит из трёх частей. В первой приведены необходимые сведения из теории категорий. Вторая часть содержит основные определения, касающиеся временных сетей-процессов. В третьей части вводятся категории временных сетей-процессов $\mathcal{TNP}_l$ и $\mathcal{TNP}_e$ с "ленивой" и "энергичной" семантиками соответственно. В каждой из подкатегорий формулируются критерии эпи- и мономорфизма и выделяются подкатегории $\mathcal{MONO}_x$ и $\mathcal{EPI}_x$ ($x \in \{e, l\}$), в которых все морфизмы — моно- и эпиморфизмы соответственно.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КАТЕГОРИЙ

В данной части приводятся необходимые сведения из теории категорий, используемые в дальнейшем. Приведённые здесь определения взяты из [6].

Понятие категории и функтора были введены в математику С. Эйленбергом и С. Маклейном в 1944 г. в связи с проблемой аксиоматизации теории групп гомологий и когомологий топологических пространств. Эти понятия постепенно нашли применение и в других областях математики.

Определение 1.1. *Будем говорить, что задана категория $\mathcal{C}$, при выполнении следующих условий.*

- *Задан класс $|\mathcal{C}|$, элементы которого будем называть* объектами категории.
- *Для каждой пары объектов A, B задано множество $\mathcal{C}(A, B)$, элементы которого будем называть морфизмами A в B.*
- *Для каждой тройки объектов A, B, C определено правило композиции:*
$$\circ : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C),$$
композиция пары (f, g) будет обозначаться как $g \circ f$.
- *Для каждого объекта A выделен морфизм $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$, называемый* тождественным.

Также должны быть выполнены следующие аксиомы.

- **Ассоциативность композиции**: *для любых морфизмов $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, $h \in \mathcal{C}(C, D)$ выполнено равенство:*
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- **Аксиома тождественности**: *для любых морфизмов $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ выполнено равенство:*
$$1_B \circ f = f, \qquad g \circ 1_B = g.$$

В дальнейшем, будем обозначать морфизм $u \in \mathcal{C}(A, B)$ как $u : A \to B$.

Напомним определения эпи- и мономорфизмов.

Определение 1.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — категория, объекты $A, B \in |\mathcal{C}|$. Морфизм $u : A \to B$ называется* мономорфизмом, *если для любого другого объекта $X \in \mathcal{C}$ и двух не равных друг другу морфизмов $v_1, v_2 : X \to A$ выполняется, что $u \circ v_1 \neq u \circ v_2$.*

Определение 1.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — категория, объекты $A, B \in |\mathcal{C}|$. Морфизм $u : A \to B$ называется* эпиморфизмом*, если для любого другого объекта $X \in \mathcal{C}$ и двух не равных друг другу морфизмов $v_1, v_2 : B \to X$ выполняется, что $v_1 \circ u \neq v_2 \circ u$.*

Приведённые в данной части понятия будут использованы для формулировки и доказательств утверждений в третьей части.

2. ВРЕМЕННЫЕ СЕТИ-ПРОЦЕССЫ

В данном пункте вводится понятие временных сетей-процессов, являющихся естественным обобщением сетей-процессов понятием времени. В данном случае используется глобальное реальное время.

Начнём с определения общеизвестного понятия сети.

Определение 2.1. Сеть *— это тройка (E, B, G), где B — не более чем счетное множество условий, E — не более чем счетное множество событий ($B \cap E = \emptyset$); $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ — отношение инцидентности ($E \subseteq dom(G) \cap cod(G)$). Сеть называется* ацикличной*, если транзитивное замыкание отношения G^+ ациклично. Сеть называется* левоконечной*, если для каждого $x \in E \cup B$ множество $\{y \mid y\ G^+\ x\}$ конечно. Сеть $N_0 = (E_0, B_0, G_0)$ является* подсетью *сети (E_1, B_1, G_1), если $B_0 \subseteq B_1$, $E_0 \subseteq E_1$ и $G_0 \subseteq G_1 \cap ((B_0 \times E_0) \cup (E_0 \times B_0))$. Два события $e_1, e_2 \in E$ находятся в отношении* непосредственного конфликта $\#'$*, если $^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 \neq \emptyset$. Элементы $x, y \in B \cup E$ находятся в* отношении конфликта $\#$*, если существуют два различных события $e_1, e_2 \in E$ таких, что $e_1\ \#'\ e_2$ и $(e_1, x), (e_2, y) \in G^*$. События $e', e'' \in E$ находятся в отношении* параллелизма $\smile$*, если верно следующее: $\neg((e'\ \#\ e'') \vee (e'\ G^*\ e'') \vee (e''\ G^*\ e'))$.*

Определение 2.2. *Пусть $Act = \{a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots\}$ — множество* меток*. Сеть (помеченная над Act) — это четвёрка (E, B, G, L), где (E, B, G) — сеть, а $L : E \to Act$ — помечающая функция.*

Определение 2.3. Сеть-процесс *— это левоконечная ацикличная сеть $N = (E, B, G)$ такая, что*

1) $\forall b \in B \diamond |^\bullet b| \leqslant 1$,

2) $\forall e \in E \diamond \neg(e\ \#\ e)$.

Пусть $^\bullet N = \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$ (множество входных условий N), $N^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$ (множество выходных условий N).

Введём определение специальной сети-процесса, которое нам понадобится в дальнейшем.

Определение 2.4. *Помеченая сеть-процесс $N = (E, B, G, L)$ называется* С-процессом*, если для всех условий $b \in B$ верно, что $|{}^\bullet b| \leqslant 1$ и $|b^\bullet| \leqslant 1$.*

C-процессы (casual processes) были введены в [5]. C-процессы являются детерменированными процессами, так как в ходе выполнения C-процесса не происходит недетерменированого выбора между несколькими альтернативными действиями.

Состояние сети-процесса определяется следующим образом.

Определение 2.5. Вычисление *сети-процесса N — это такая подсеть $\pi = (B_\pi, E_\pi, G_\pi)$, что ${}^\bullet\pi = {}^\bullet N$ и $|b^\bullet| \leqslant 1$ для всех $b \in B_\pi$. Начальное вычисление π_N — это вычисление такое, что $E_{\pi_N} = \emptyset$. Пусть $Comp(N)$ — множество всех вычислений сети N. Событие $e \in E$ допускается вычислением $\pi \in Comp(N)$, если ${}^\bullet e \subseteq \pi^\bullet$. Пусть $En(\pi)$ — множество событий, допускаемых вычислением π. Если $e \in E$ допускается вычислением π, то π может быть продолжено до вычисления π' добавлением события e и множества мест $e^\bullet$. Обозначение: $\pi \xrightarrow{e} \pi'$.*

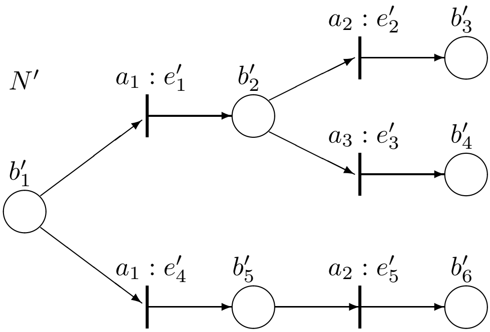


Рис. 1

Пример 2.1. *На рис. 1 изображена помеченная сеть-процесс $N' = (E', B', G', L')$. В качестве примера вычисления $\pi \in Comp(N')$ может быть рассмотрено следующее: $E_\pi = \{e'_4, e'_5\}$, $B_\pi = \{b'_1, b'_5, b'_6\}$, а остальные компоненты — это сужения соответствующих компонентов N'.*

Определение 2.6. Временная сеть-процесс (помеченная над Act) *— это кортеж $TN = (N = (E, B, G, L), Eot, Lot)$, где N — сеть-процесс (помеченная над Act) и $Eot, Lot : E \to \mathbb{N}$ (где $\mathbb{N}$ — множество целых неотрицательных чисел), которые являются функциями наиболее раннего и наиболее позднего моментов выполнения события соответственно. Причём $Eot(e) \leqslant Lot(e)$ для каждого $e \in E$; и для всех $e, e' \in E$ если $e\ G^*\ e'$, то $Eot(e) \leqslant Eot(e')$ и $Lot(e) \leqslant Lot(e')$. Пусть $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных неотрицательных чисел и $Interv_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{N}\}$. Тогда определим $\mathcal{D}_N : E \to Interv_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ — функцию временных интервалов, определённую как $\mathcal{D}_N(e) = [Eot(e), Lot(e)]$.*

Для временных сетей-процессов $TN_0 = (N_0, Eot_0,\ Lot_0)$ и $TN_1 = (N_1,\ Eot_1, Lot_1)$ определим

$$
\begin{aligned}
&TN_0 \subseteq TN_1 \iff \\
&N_0 \subseteq N_1\ \&\ \forall e \in E_0 \diamond (Eot_0(e) = Eot_1(e)\ \&\ Lot_0(e) = Lot_1(e)).
\end{aligned}
$$

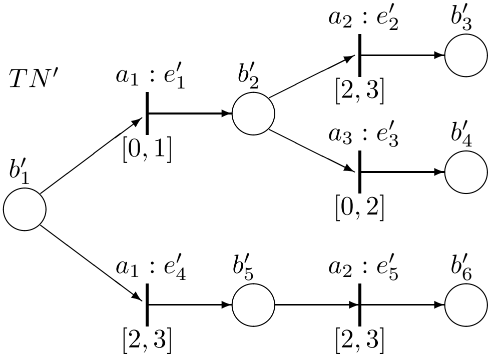


Рис. 2

Пример 2.2. *Пример временной сети-процесса, являющейся временной версией сети-процесса, приведённой на рис. 1, изображён на рис. 2. В квадратных скобках рядом с событиями указаны два числа — наиболее раннее и позднее моменты срабатывания данного события соответственно.*

3. КАТЕГОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ-ПРОЦЕССОВ

3.1. "Ленивая" семантика

Определение 3.1. *Пусть* $TN = (N = (E, B, G, L), Eot, Lot)$ *— временная сеть-процесс,* $\pi \in Comp(N)$ *и* $T : E_\pi \to \mathbb{R}$. *Тогда* (π, T) *— временное вычисление временной сети-процесса* TN *(в "ленивой" семантике) при выполнении следующих условий:*

1) $\pi \in Comp(N)$,

2) $\forall e \in E_\pi \diamond Eot(e) \leqslant T(e) \leqslant Lot(e)$,

3) $\forall e, e' \in E_\pi \diamond e\ G^*\ e' \Rightarrow T(e) \leqslant T(e')$.

Пусть $TComp_l(TN)$ *— множество всех временных вычислений временной сети-процесса* TN *(в "ленивой" семантике). На введённом множестве определим отношения:*

$$(\pi, T) \xrightarrow{(e,d)} (\pi', T') \iff \pi \xrightarrow{e} \pi' \ \&\ T'|_{E_\pi} = T \ \&\ T'(e) = d,$$

которое будет обозначать, что временное вычисление (π', T') *получено из* (π, T) *присоединением события* e *в* момент времени d. *Затем,*

$$(\pi, T) \subseteq (\pi', T') \iff \pi \subseteq \pi' \ \&\ T'\,|_{E_\pi} = T.$$

Говоря неформально, в "ленивой" семантике событие, если оно допускается данным вычислением и выполнены его временные ограничения, *может произойти, а может и нет.*

Пример 3.1. *Рассмотрим вычисление* π, *определённое в примере 2.1, и определим* $T : E_\pi \to \mathbb{R}$ *следующим образом:* $T(e_4) = 2$, $T(e_5) = 3$. *Тогда* $(\pi, T) \in TComp_l(TN')$, *где временная сеть-процесс* TN' *изображена на рис. 2.*

Определение 3.2. *Пусть* TN_0, TN_1 *— временные сети-процессы (помеченные над* Act*),* $TN_i = ((E_i, B_i, G_i, L_i), Eot_i, Lot_i), i = 0, 1$. *Тогда* $u = (\mu, \lambda) : TN_0 \to TN_1$ *— морфизм временных сетей-процессов (в "ленивой" семантике), если* $\mu : E_0 \to E_1$ *— всюду определённая функция,* $\lambda \subseteq B_0 \times B_1$ *— отношение, и выполнены следующие условия:*

а) $L_0 = L_1 \circ \mu$;

б) $\forall (\pi_0, T_0) \in TComp_l(TN_0) \diamond (u(\pi_0), T_1) \in TComp_l(TN_1)$ $(T_0 = T_1 \circ \mu)$ *и* $\forall e, e' \in E_{\pi_0} \diamond \mu(e) = \mu(e') \Rightarrow e = e'$.

TN''

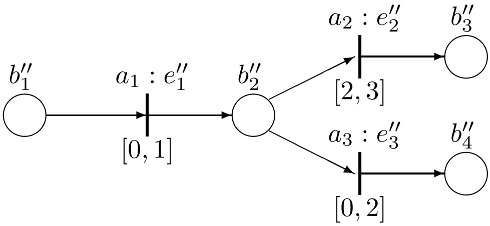


Рис. 3

Рассмотрим временное вычисление $(\pi_0, T_0) \in TComp_l(TN_0)$, *для которого определим выражение* $u(\pi_0, T_0) = (u(\pi_0), T_1) \in TComp_l(TN_1)$, *где* $T_1 : \mu(E_{\pi_0}) \to \mathbb{R}$ *— отображение, такое что* $T_0 = T_1 \circ \mu$, *которое также будем обозначать* $u(T_1)$, *а компоненты сети* $u(\pi_0)$ *определяются следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&E_{u(\pi_0)} = \mu(E_{\pi_0}),\\
&B_{u(\pi_0)} = \lambda(B_{\pi_0}),\\
&G_{u(\pi_0)} = G_1 \cap ((E_{u(\pi_0)} \times B_{u(\pi_0)}) \ \cup \ (B_{u(\pi_0)} \times E_{u(\pi_0)})),\\
&L_{u(\pi_0)} = L_1|_{E_{u(\pi_0)}}.
\end{aligned}$$

Пример 3.2. *В качестве примера может быть рассмотрен морфизм между временными сетями-процессами* TN' *(рис. 2) и* TN'' *(рис. 3) —* $(\mu, \lambda) : TN'' \to TN'$, *определённый следующим образом:* $\mu(e_i'') = e_i'$ $(i = \overline{1,3})$ *и* $\lambda = \{(b_i'', b_i') \mid i = \overline{1,4}\}$.

Утверждение 3.1. *Множество временных сетей-процессов и морфизмы между ними, определённые в "ленивой" семантике, образуют категорию временных сетей* $\mathcal{TNP}_l$. *При этом тождественный морфизм — это тождественное отображение, а композиция морфизмов определена как покоординатная.*

Для доказательства данного утверждения необходимо проверить, что тождественное отображение и композиция морфизмов являются морфизмами. Первое очевидно, проверим второе.

Пусть TN_0, TN_1 и TN_2 — временные сети-процессы и пусть $u = (\mu, \lambda) : TN_0 \to TN_1$, $u' = (\mu', \lambda') : TN_1 \to TN_2$ — морфизмы. Проверим, что пара $(\mu' \circ \mu, \lambda' \circ \lambda)$ является морфизмом.

а) $L_2 \circ (\mu' \circ \mu) = L_1 \circ \mu = L_0$, б) $(\pi, T) \in TComp_l(TN_0) \implies u(\pi, T) = (\pi', T') \in TComp_l(TN_1) \implies u'(\pi', T') = u' \circ u\,(\pi, T) \in TComp_l(TN_2)$.

Второе утверждение пункта определения выполнено с очевидностью.

Утверждение 3.2. *Пусть TN_0, TN_1 — временные сети-процессы (помеченные над Act) ($TN_i = ((E_i, B_i, G_i, L_i), Eot_i, Lot_i), i = 0, 1$), пусть $u = (\lambda, \mu) : TN_0 \to TN_1$ — морфизм. Тогда u — эпиморфизм, если и только если μ — сюръективное отображение.*

($\Longrightarrow$) Пусть u — эпиморфизм, но μ — не сюрьекция. Тогда существует событие $e_0 \in E_1$ такое, что $e_0 \notin \mu(E_0)$. Исходя из этого построим новую временную сеть-процесс $TN = (N = (E, B, G, L),\ Eot, Lot)$ такую, что найдутся неравные друг другу морфизмы $v_0, v_1 : TN_1 \to TN$ такие, что $v_0 \circ u = v_1 \circ u$, т.е. получим противоречие с определением эпиморфизма.

Для построения TN сначала определим множество $X_{e_0} = \{x \in E_1 \cup B_1 \mid e_0\ G^*\ x\}$, а затем — множества $E_{e_0} = X_{e_0} \cap E_1$, $B_{e_0} = X_{e_0} \cap B_1$, $E_\star = E_1 \setminus E_{e_0}$, $B_\star = B_1 \setminus B_{e_0}$. Пусть $E_{Edge} = \{e \in E_{e_0} \mid \exists b \in {}^\bullet e \diamond b \notin B_{e_0}\}$ и $B_{Edge} = \bigcup\limits_{e \in E_{Edge}} ({}^\bullet e \setminus B_{e_0}) \subseteq B_\star$.

Определим компоненты TN следующим образом:

- $E = (E_\star \times \{\star\}) \cup (E_{e_0} \times \{0, 1\})$;
- $B = (B_\star \times \{\star\}) \cup (B_{e_0} \times \{0, 1\})$;
- $G = \{((x, \star), (y, \star)) \mid x, y \in B_\star \cup E_\star \ \&\ (x, y) \in G_1\}$
  $\cup \{((x, i), (y, i)) \mid (x, y) \in G_1 \ \&\ (i = 0, 1)\}$
  $\cup \{((b, \star), (e, i)) \mid b \in B_{Edge} \ \&\ (e, i) \in (E_{Edge} \times \{0, 1\})\}$;
- $L(e) = \begin{cases} L_1(e'), \text{ если } e = (e', \star) \in E_\star \times \{\star\}, \\ L_1(e'), \text{ если } e = (e', i) \in E_{e_0} \times \{0, 1\}; \end{cases}$
- $Eot(e) = \begin{cases} Eot_1(e'), \text{ если } e = (e', \star) \in E_\star \times \{\star\}, \\ Eot_1(e'), \text{ если } e = (e', i) \in E_{e_0} \times \{0, 1\}; \end{cases}$
- Функция Lot определяется аналогично функции Eot.

Докажем, что TN действительно временная сеть-процесс. Согласно построению TN легко видеть, что $N = (E, B, G, L)$ — левоконечная ациклическая сеть (помеченная над Act). Необходимо рассмотреть 2 пункта из определения 2.3.

1) Проверим, что верно: $\forall b \in B \diamond |{}^\bullet b| \leqslant 1$. По определению отношения G очевидно, что это условие выполнено для всех $b \in B_\star \times \{\star\}$. Допустим, что для некоторого $b = (b', i) \in B_{e_0} \times \{0, 1\}$ это условие не выполнено, т.е. $|{}^\bullet b| > 1$. По определению отношения G имеем: ${}^\bullet b = \{(e', i) \in E_{e_0} \times \{0, 1\} \mid e'\ G_1\ b'\}$. Таким образом, из допущения $|{}^\bullet b| > 1$ следует, что $|{}^\bullet b'| > 1$, а это противоречит тому, что

TN_1 — временная сеть-процесс.

2) В случае, когда $e \notin E_{Edge} \times \{0,1\}$, чтобы доказать, что $\forall e \in E \ {}_{\diamond} \ \neg(e \ \# \ e)$, достаточно провести рассуждения аналогичные пункту 1. Для $e \in E_{Edge} \times \{0,1\}$ требуются следующие дополнительные рассуждения. Допустим, что существует $e = (e', i) \in E_{Edge} \times \{0,1\}$ такое, что $e \# e$. Тогда, по определению конфликта, существуют неравные между собой события $e_1, e_2 \in E$ такие, что ${}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 \neq \emptyset$. Возможны три случая.
   - $e_j = (e'_j, i_j) \in E_{e_0} \times \{0,1\}$ $(j = 1,2)$. Очевидно, что $i_1 = i_2 = i$. По определению G (вторая строка) имеем: ${}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 \neq \emptyset \iff {}^\bullet e'_1 \cap {}^\bullet e'_2 \neq \emptyset$. Следовательно, пришли к противоречию с тем, что TN_1 — временная сеть-процесс.
   - $e_j = (e'_j, \star) \in E_\star \times \{\star\}$ $(j = 1,2)$. Аналогично предыдущему пункту.
   - $e_1 = (e'_1, i') \in E_{e_0} \times \{0,1\}, e_2 = (e'_2, \star) \in E_\star \times \{\star\}$. В этом случае, $e_1 \in E_{Edge} \times \{0,1\}$, и следовательно, $({}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2) \bigcap B_{Edge} \neq \emptyset$. В силу определения G (третья строка) получаем, что ${}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 \neq \emptyset \iff {}^\bullet e'_1 \cap {}^\bullet e'_2 \neq \emptyset$. Следовательно, пришли к противоречию с тем, что TN_1 — временная сеть-процесс.

Далее, исходя из построения функций Eot, Lot имеем, что TN — временная сеть-процесс (помеченная над Act).

Теперь построим отображения $v_i = (\lambda_i, \mu_i) : TN_1 \to TN, (i = 0,1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_i = &\{(b, b') \mid b' = (b, \star) \in B_\star \times \{\star\}\} \\ &\cup \{(b, b') \mid b' = (b, i) \in B_{e_0} \times \{0,1\}\};\end{aligned}$$

$$\mu_i(e) = \begin{cases} (e, \star), & \text{если } e \in E_\star, \\ (e, i), & \text{если } e \in E_{e_0}. \end{cases}$$

Убедимся, что построенные v_i, $(i = 0,1)$ — морфизмы, проверив два пункта определения 3.2.

1) $L = L' \circ \mu_i$.
2) Рассмотрим временное вычисление $(\pi, T) \in TComp_l(TN)$. Нетрудно показать, что $u(\pi)$ — вычисление сети TN. Действительно, пусть во всех выражениях данного абзаца, где встречается индекс i, подразумевается, что $i = 0,1$. Очевидно, что нетривиальным является лишь случай, когда $E_\pi \cap E_{e_0} \neq \emptyset$. Так как N —

сеть-процесс, то $v_i(\pi)$ — левоконечная ацикличная сеть. Также очевидно, что ${}^\bullet N = {}^\bullet v_i(\pi)$, так как $X_{e_0} \cap {}^\bullet \pi_N = \emptyset$. Докажем, что для всех $b \in B_{v_i(\pi)}$ верно, что $|b^\bullet| \leqslant 1$. Допустим обратное: существует условие $b' \in \lambda_i\, B_\pi$ такое, что $|b'^\bullet| > 1$. Тогда из определения v_i следует, что $|\lambda_i^{op}(b)^\bullet| > 1$. Определим функцию

$$T'(e) = \begin{cases} T(e'), \text{ если } e = (e', \star) \in E_\star \times \{\star\}, \\ T(e'), \text{ если } e = (e', i) \in E_{e_0} \times \{0, 1\}. \end{cases}$$

Из построения сети TN имеем, что $T' = \mu \circ T$, и следовательно, $u(\pi, T) = (u(\pi), T') \in TComp_l(TN)$. Второе утверждение пункта б) определения морфизма выполнено с очевидностью.

Убедимся, что $v_0 \circ u = v_1 \circ u$. Пусть $e \in E_0$. Тогда, так как для всех $e' \in \mu(E_0)$ верно $\mu_0(e') = \mu_1(e')$ по определению v_0 и v_1 и так как $\mu(E_0) \subseteq E_\star$, то имеем, что $\mu_0 \circ \mu(e) = \mu_1 \circ \mu(e)$. Тот факт, что $\lambda_0 \circ \lambda = \lambda_1 \circ \lambda$ следует из того, что $\lambda(E_0) \subseteq B_\star$. Пришли к противоречию. Необходимость доказана.

($\Longleftarrow$) Пусть теперь известно, что μ — сюрьекция. Допустим, что u не эпиморфизм. Тогда существует временная сеть-процесс $TN = (N = (E, B, G, L), Eot, Lot)$ и отображения $v_i = (\mu_i, \lambda_i) : TN_1 \to TN$, $(i = 0, 1)$ такие, что $v_0 \neq v_1$ и $v_0 \circ u = v_1 \circ u$. Так как $v_0 \neq v_1$, то существует событие $e_0 \in E_1$ такое, что $\mu_0(e_0) \neq \mu_1(e_0)$. Кроме того, так как μ — сюрьекция, то существует событие $e_1 \in E_0$ такое, что $\mu(e_1) = e_0$. Согласно нашему допущению, $\mu_0 \circ \mu(e) = \mu_1 \circ \mu(e)$ для всех $e \in E_1$ (и, следовательно, для e_1). Однако $\mu(e_1) = e_0$, а $\mu_0(e_0) \neq \mu_1(e_0)$ — противоречие. Достаточность доказана.

Утверждение 3.3. *Пусть TN_0, TN_1 — временные сети-процессы (помеченные над Act), $TN_i = (N_i = (E_i, B_i, G_i, L_i), Eot_i, Lot_i)$, $i = 0, 1$, пусть $u = (\lambda, \mu) : TN_0 \to TN_1$ — морфизм. Тогда u — мономорфизм, если и только если функция μ — инъекция для всех $e \in E_0$, кроме тех неравных друг другу событий $e_0, e_1 \in E_0$, для которых верно:*

$$\begin{aligned} &(e_0 \mathbin{\#} e_1)\ \& \\ &(\exists e_0', e_1' \in E_0 \diamond (e_0' \neq e_1')\ \&\ (e_0' \mathbin{\#'} e_1')\ \&\ (e_0'\ G_0^*\ e_0)\ \&\ (e_1'\ G_0^*\ e_1)\ \& \\ &\qquad (\mathcal{D}(e_0') \cap \mathcal{D}(e_1') = \emptyset)). \end{aligned} \qquad (T)$$

($\Longrightarrow$) Доказательство необходимости будем вести от противного. Допустим, u — мономорфизм и условие теоремы (T) не выполнено. Формально,

$$\begin{array}{lcll}\neg(T) & = & \exists e_0, e_1 \in E_0 \diamond \Big[& \big(e_0 \neq e_1\big) \ \& \ \big(\mu(e_0) = \mu(e_1)\big) \ \& \\ & & & \big(\neg(e_0 \# e_1) \vee (\forall e_0', e_1' \in E_0 \diamond (e_0' = e_1') \vee \\ & & & \neg(e_0' \#' e_1') \vee \neg(e_0' \ G_0^* \ e_0) \vee \neg(e_1' \ G_0^* \ e_1) \vee \\ & & & (\mathcal{D}(e_0') \cap \mathcal{D}(e_1') \neq \emptyset))\big) \Big].\end{array}$$

Нетрудно доказать, что если $\mu(e_0) = \mu(e_1)$, то $e_0 \# e_1$. Действительно, допустим обратное. Так как N_0 — сеть-процесс, имеем: $e_0 \smile e_1 \vee e_0 \, G_0^+ \, e_1 \vee \ e_1 \, G_0^+ \, e_0$.

- Рассмотрим случай $e_0 \smile e_1$. Тогда существует временное вычисление $(\pi, T) \in TComp_l(N_0)$ такое, что $e_0, e_1 \in E_\pi$. Так как $\mu(e_0) = \mu(e_1)$, то получили противоречие с пунктом a определения морфизма.
- Случаи $e_0 \ G^+ \ e_1$, $e_1 \ G_0^+ \ e_0$ рассматриваются аналогично предыдущему.

$$\begin{array}{ll}\text{Так как} & \mu(e_0) = \mu(e_1) \Rightarrow \\ & e_0 \# e_1 \Rightarrow \\ & (\exists e_0', e_1' \in E_0 \diamond (e_0' \neq e_1') \ \& \ (e_0' \ G^* \ e_0) \ \& \ (e_1' \ G^* \ e_1) \ \& \ (e_0' \#' e_1')),\end{array}$$

то

$$\forall e_0', e_1' \diamond (e_0' \ G^* \ e_0) \ \& \ (e_1' \ G^* \ e_1) \ \& \ (e_0 \#' e_1) \Rightarrow (\mathcal{D}(e_0') \cap \mathcal{D}(e_1') \neq \emptyset).$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} \stackrel{def}{=} \{(e_0', e_1') \mid (e_0' \ G^* \ e_0) \ \& \ (e_1' \ G^* \ e_1) \ \& \ (e_0' \#' e_1')\}.$$

Очевидно, для всех (e_0', e_1') верно $\mu(e_0') = \mu(e_1')$, так как обратное предположение с учётом того, что $\mu(e_0) = \mu(e_1)$, приводит к самоконфликту. Введём на $\mathcal{M}$ отношение $\prec$ следующим образом:

$$(e_0', e_1') \prec (e_0'', e_1'') \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ (e_0' \ G^+ \ e_0'') \ \& \ (e_1' \ G^+ \ e_1'').$$

Это отношение частичного порядка. Вследствие левоконечности TN_0, в $< \mathcal{M}, \prec >$ существуют минимальные элементы. Пусть $(\check{e}_0, \check{e}_1)$ — минимальный в $< \mathcal{M}, \prec >$.

Исходя из этого, построим новую временную сеть-процесс $TN = (N = (E, B, G, L), Eot, Lot)$ для которой найдутся неравные друг другу морфизмы $v_0, v_1 : TN \to TN_0$ такие, что $u \circ v_0 = u \circ v_1$, т.е. получим противоречие с определением мономорфизма.

Для построения TN определим следующие множества: $X = {}^\bullet\check{e}_0 \cap {}^\bullet\check{e}_1$, $P = X \cap {}^\bullet N_0$, $X_i = {}^\bullet\check{e}_i \setminus X$, $P_i = X_i \cap {}^\bullet N_0$. Из определения морфизма и условия $\mu(\check{e}_0) = \mu(\check{e}_1)$ следует, что $(P_i \neq \emptyset) \Rightarrow (P \neq \emptyset) \vee (P_{1-i} \neq \emptyset)$ $(i = 0, 1)$. Пусть $I = \{e \in E_0 \mid (e^\bullet \cap X = \emptyset) \ \&\ (\forall i \in \{0, 1\} \diamond e^\bullet \cap X_i \neq \emptyset)\}$, B^I — некоторое множество условий такое, что $I = \emptyset \Rightarrow B^I = \emptyset$, $|B^I| = |I|$ и $B^I \cap (E_0 \cup B_0) = \emptyset$. Элементы B^I, если множество не пустое, мы будем индексировать событиями из I: $B^I = \{b_e \mid e \in I\}$.

Компоненты TN определим следующим образом:

- $E = (E_0 \cup \{e_\star\}) \times \{\star\}$, $e_\star$ — некоторое дополнительное событие и $e_\star \notin E_1 \cup B_0$;
- $B = (B_0 \cup \{b_\star^+\} \cup B' \cup B^I) \times \{\star\}$, где
$$B' = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } P_0 = P_1 = \emptyset \\ \{b_\star^-\}, & \text{иначе,} \end{cases}$$
здесь $b_\star^+, b_\star^-$ — дополнительные условия такие, что $b_\star^+, b_\star^- \notin E_0 \cup B_0$;
- $G = \{((x, \star), (y, \star)) \mid (x, y) \in G_0\}$
$\cup \{((b, \star), (e_\star, \star)) \mid b \in X\}$
$\cup \{((e, \star), (b_e, \star)) \mid e \in I\}$
$\cup \{((b_e, \star), (e_\star, \star)) \mid e \in I\}$
$\cup \{((e_\star, \star), (b_\star^+, \star))\} \cup G'$,
где
$$G' = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } P_0 = P_1 = \emptyset \\ \{((b_\star^-, \star), (e_\star, \star))\}, & \text{иначе;} \end{cases}$$
- $L(e) = \begin{cases} L_0(e'), & \text{если } e = (e', \star) \in E_0 \times \{\star\}, \\ L_0(\check{e}_0), & \text{если } e = (e_\star, \star); \end{cases}$
- $Eot(e) = \begin{cases} Eot_0(e'), & \text{если } e = (e', \star) \in E_0 \times \{\star\}, \\ \max\{Eot(\check{e}_0), Eot(\check{e}_1)\}, & \text{если } e = (e_\star, \star); \end{cases}$
- $Lot(e) = \begin{cases} Eot_0(e'), & \text{если } e = (e', \star) \in E_0 \times \{\star\}, \\ \min\{Lot(\check{e}_0), Lot(\check{e}_1)\}, & \text{если } e = (e_\star, \star). \end{cases}$

Неформально говоря, мы добавили новое событие $e_\star$, соединили его с условиями из X и через новые условия из B^I с событиями из I. Условие $b_\star^+$ является выходным для $e_\star$, а условие $b_\star^-$, находящееся также в начальном вычислении, является для $e_\star$ входным.

Согласно построения TN и определения условия (T) легко видеть, что TN — временная сеть-процесс (помеченная над Act).

Теперь построим отображения $v_i = (\lambda_i, \mu_i) : TN \to TN_0$ $(i = 0, 1)$. Определим компоненты v_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_i = {} & \{((b, \star), b) \mid b \in B_0\} \\ & \cup \{((b_\star^+, \star), b) \mid b \in \check{e}_i{}^\bullet\} \\ & \cup \lambda' \cup \lambda'', \end{aligned}$$

где

$$\lambda' = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } P_0 = P_1 = \emptyset, \\ \{((b_\star^-, \star), b) \mid b \in P_i\}, & \text{если } P_i \neq \emptyset, \\ \{((b_\star^-, \star), b) \mid b \in P\}, & \text{если } P_i = \emptyset, \end{cases}$$

$$\lambda'' = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } I = \emptyset \\ \{((b_e, \star), b) \mid e \in I \ \& \ b \in e^\bullet \cap {}^\bullet\check{e}_i\}, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mu_i(e) = \begin{cases} e, & \text{если } e = (e', \star) \in (E_\star \times \{\star\}) \\ \check{e}_i, & \text{если } e = (e_\star, \star). \end{cases}$$

Проверим по определению 3.2, что v_i $(i = 0, 1)$ — действительно морфизмы.

1. Непосредственно из определения v_i $(i = 0, 1)$ следует, что $L = L' \circ \mu_i$.
2. Нетрудно заметить, что условие достаточно проверить для временных вычислений $(\pi, T), (\pi_\star, T_\star) \in TComp_l(TN)$, где временное вычисление (π, T) — минимальное по включению такое, что $(e_\star, \star) \in En(\pi)$, и $(\pi, T) \xrightarrow{((e_\star, \star), d)} (\pi_\star, T_\star)$ для некоторого $d \in R$. Для этого определим $\pi', \pi'_i \in Comp(N_0)$ $(i = 0, 1)$ — вычисления, где π' — минимальное по включению вычисление такое, что $e_i \in En(\pi')$ $(i = 0, 1)$, и $\pi' \xrightarrow{e_i} \pi'_i$ $(i = 0, 1)$. Покажем, что $v_i(\pi) = \pi'$ и $v_i(\pi_\star) = \pi'_i$ $(i = 0, 1)$. Действительно, по определению TN и v_i:
$$\begin{aligned} & \lambda_i(B_\pi \setminus (B' \cup B^I)) = B_{\pi'}, \\ & \mu(E_\pi) = E_{\pi'}, \\ & \lambda(B' \cup B^I) \subseteq B_{\pi'}. \end{aligned}$$
Следовательно, $v_i(\pi) = \pi'$ $(i = 0, 1)$. Аналогично доказывается, что $v_i(\pi_\star) = \pi'_i$ $(i = 0, 1)$.

Очевидно, что если $T' : E_{v_i(\pi)} \to \mathbb{R}$ — отображение для которого $T = T' \circ \mu$, то $(v_i(\pi), T') \in TComp_l(TN_0)$ $(i = 0,1)$. Заметим, что

$$T_\star((e_\star, \star)) \in \mathcal{D}((e_\star, \star)) \subseteq \mathcal{D}((\check{e}_i, \star)) = \mathcal{D}(\check{e}_i) \; (i = 0,1).$$

Поэтому, если $T'_\star : E_{v_i(\pi)} \to \mathbb{R}$ — отображение, для которого $T = T'_\star \circ \mu$, то $(v_i(\pi_\star), T'_\star) \in TComp_l(TN_0)$. Второе утверждение пункта 1). определения морфизма выполнено с очевидностью.

Убедимся, что $u \circ v_0 = u \circ v_1$. Действительно, $\mu_0(e) = \mu_1(e)$ для всех $e \in (E_0 \times \star)$. Тогда достаточно проверить, что $\mu \circ \mu_0((e_\star, \star)) = \mu \circ \mu_0((e_\star, \star))$. Это очевидно, так как $\mu_i((e_\star, \star)) = e_i$ $(i = 0,1)$ и так как $\mu(\check{e}_0) = \mu(\check{e}_1)$. Необходимость доказана.

$(\Longleftarrow)$ Пусть T верно, но u не мономорфизм. Тогда существуют временная сеть-процесс $TN = (N = (B, E, G, L), Eot, Lot)$ (помеченная над Act) и морфизмы $v_i = (\lambda_i, \mu_i) : TN \to TN_0\,(i = 0,1)$ для которых $v_0 \neq v_1$ и $u \circ v_1 = u \circ v_2$. Из факта $v_0 \neq v_1$ следует, что существует событие $e_0 \in E$, для которого верно, что $\mu_0(e_0) \neq \mu_1(e_0)$. Пусть $e_{v_i} = \mu_i(e_0)\,(i = 0,1)$. Тогда, так как $u \circ v_1 = u \circ v_2$, то $\mu(e_{v_0}) = \mu(e_{v_1}) = e_u$. Так как T верно, то

$$\begin{array}{l} (e_{v_0} \# e_{v_1}) \; \& \\ (\exists e^{\#}_{v_0} \neq e^{\#}_{v_1} \in E_0 \diamond (e^{\#}_{v_0} \#' e^{\#}_{v_1}) \; \& \; (e^{\#}_{v_0} \; G_0^* \; e_{v_0}) \; \& \; (e^{\#}_{v_1} \; G_0^* \; e_{v_1}) \; \& \\ \qquad\qquad\qquad (\mathcal{D}(e^{\#}_{v_0}) \cap \mathcal{D}(e^{\#}_{v_1}) = \emptyset)). \end{array}$$

Без ограничения общности можно считать, что выполнено следующее условие:

$$\nexists e_0, e_1 \in E_0 \diamond e_i \; G^* \; e^{\#}_{v_i} \; (i = 0,1) \;\; \& \;\; (e_0 \# e_1).$$

Нетрудно заметить, что $\mu_0^{-1}(e^{\#}_{v_0}) \cap \mu_1^{-1}(e^{\#}_{v_1}) = Z \neq \emptyset$. Действительно, допустим обратное: $Z = \emptyset$. Пусть $e' \in \mu_0^{-1}(e^{\#}_{v_0})$, $e'' \in \mu_0^{-1}(e^{\#}_{v_1})$. Нетрудно показать, что $e', e'' \; G^+ \; e_0$. Возможны следующие случаи:

- $e' \# e''$. Тогда получаем $e_0 \# e_0$. Противоречие с определением сети-процесса.
- $\neg(e' \# e'')$. Тогда, так как TN_0 — корректно таймированная, существует временное вычисление $(\pi, T) \in TComp_l(TN)$ такое, что $e', e'' \in E_\pi$. Так как $e^{\#}_{v_0} \# e^{\#}_{v_1}$, то $v_i(\pi) \notin Comp(N_0)$ $(i = 0,1)$, и следовательно, $v_i(\pi, T) \notin TComp_l(TN_0)$ — противоречие с пунктом *б* определения морфизма.

Рассмотрим событие $e \in Z$. По свойствам семантики существует временное вычисление $(\pi, T) \in TComp_l(TN)$ такое, что $e \in E_\pi$. По определению морфизма, $v_i(\pi, T) \in TComp_l(TN)$ $(i = 0, 1)$ и, следовательно, $T(e) = v_i(T) \circ \mu_i(e) = v_i(T)(e^{\#}_{v_i})$ $(i = 0, 1)$. Получаем, что $T(e) \in \mathcal{D}(e^{\#}_{v_0}) \cap \mathcal{D}(e^{\#}_{v_1}) = \emptyset$. Противоречие. Достаточность доказана.

3.2. "Энергичная" семантика

Определение 3.3. *Пусть $TN = (N = (E, B, G, L), Eot, Lot)$ — временная сеть-процесс, $\pi \in Comp(TN)$ и $T : E_\pi \to \mathbb{R}$. Тогда (π, T) — временное вычисление временной сети-процесса TN (в "энергичной" семантике) при выполнении следующих условий:*

1) $\pi \in Comp(N)$;

2) $\forall e \in E_\pi \diamond Eot(e) \leqslant T(e) \leqslant Lot(e)$;

3) $\forall e, e' \in E_\pi \diamond e\, G^*\, e' \Rightarrow T(e) \leqslant T(e')$;

4) $\forall e \in (E \setminus E_\pi) \diamond Lot(e) \geqslant T(e')$ для всех $e' \in E_\pi$ или
$Lot(e) \geqslant T(e')$ для некоторого $e' \in E_\pi$, $e \# e'$.

Пусть $TComp_e(TN)$ — множество всех временных вычислений временной сети-процесса TN.

Заметим, что в отличие от "ленивой" семантики, в "энергичной" событие *обязано* произойти, если оно допускается данным вычислением и выполнены его временные ограничения. Это гарантируется четвёртым пунктом определения 3.3.

Определение 3.4. *Будем называть временную сеть-процесс $TN = (N = (E,\ B,\ G,\ L),\ Eot,\ Lot)$* корректно таймированной, *если для каждого события $e \in E$ существует временное вычисление $(\pi, T) \in TComp_e(TN)$ такое, что $e \in E_\pi$.*

Пример 3.3. *В качестве примера корректно таймированной временной сети-процесса может быть выбрана TN'', изображённая на рис. 3, а в качестве некорректно таймированной — TN', показанная на рис. 2, в которой для событий e'_4 и e'_5 не существует временных вычислений, в которые они бы входили.*

Определение 3.5. *Пусть TN_0, TN_1 — временные сети-процессы (помеченные над Act), $TN_i = ((E_i, B_i, G_i, L_i), Eot_i, Lot_i), i = 0, 1$. Тогда $u = (\mu, \lambda) : TN_0 \to TN_1$ — морфизм временных сетей-процессов (в "энергичной" семантике), если $\mu : E_0 \to E_1$ — всюду определённая функция, $\lambda \subseteq B_0 \times B_1$ — отношение и выполнены следующие условия:*

a) $L_0 = L_1 \circ \mu$;

б) $\forall(\pi_0,T_0)\in TComp_e(TN_0) \diamond (u(\pi_0),T_1) \in TComp_e(TN_1)$ $(T_0 = T_1 \circ \mu)$ *и*

- $\forall e,e' \in E_{\pi_0} \diamond \mu(e)=\mu(e') \Rightarrow e=e'$,
- $\forall e,e' \in E_{\pi_0} \diamond \mu(e)\ G_1^+\ \mu(e') \Rightarrow e\ G_0^+\ e'$.

Отношение $\cdot \xrightarrow{(e,d)} \cdot$ *и значение выражения* $u(\pi,T)$ *для временного вычисления* $(\pi,T)\in TComp_e(TN)$ *определяются точно так же, как и в определении 3.2.*

Пример 3.4. *Приведём пример морфизма в данной семантике. Заметим при этом, что морфизм, приведённый в примере 3.2, является морфизмом и в данной семантике, однако можно привести более специфичный для неё пример.*

Морфизм $(\lambda,\mu): TN' \to TN''$ *(*TN' *и* TN'' *изображены на рис. 2 и рис. 3 соответственно) определим следующим образом:*

$$\mu(e_i') = \begin{cases} e_i'', & \text{если} i \in \overline{1,3}, \\ \emptyset, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$\lambda = \{(b_i', b_i'') \mid i = \overline{1,4}\}.$$

Утверждение 3.4. *Множество временных сетей-процессов и морфизмы между ними, определённые в "энергичной" семантике, образуют категорию временных сетей* $\mathcal{TNP}_e$. *При этом тождественный морфизм — это тождественное отображение, а композиция морфизмов определена как покоординатная.*

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 3.1.

Утверждение 3.5. *Пусть* TN_0, TN_1 *— временные сети-процессы (помеченные над Act),* $TN_i = ((E_i,B_i,G_i,L_i),Eot_i,Lot_i), i=0,1$, *пусть* $u=(\lambda,\mu): TN_0 \to TN_1$ *— морфизм. Тогда* u *— эпиморфизм, если и только если* μ *— сюръективное отображение.*

Аналогично доказательству утверждения 3.2.

Утверждение 3.6. *Пусть* TN_0, TN_1 — корректно таймированные *временные сети-процессы (помеченные над Act),* $TN_i = (N_i = (E_i,B_i,G_i,L_i),Eot_i,Lot_i), i = 0,1$, *пусть* $u = (\lambda,\mu): TN_0 \to TN_1$ *— морфизм. Тогда* u *— мономорфизм, если и только если функция* μ *всюду определённая и инъекция для всех* $e \in E_0$, *кроме тех неравных друг другу* *событий* $e_0, e_1 \in E_0$, *для которых верно:*

$$\begin{array}{ll}(e_0 \,\#\, e_1)\ \& & \\ (\exists e'_0, e'_1 \in E_0 \diamond (e'_0 \neq e'_1)\ \&\ (e'_0 \,\#'\, e'_1)\ \&\ (e'_0\ G_0^*\ e_0)\ \&\ (e'_1\ G_0^*\ e_1)\ \& & (T)\\ \qquad\qquad\qquad (\mathcal{D}(e'_0) \cap \mathcal{D}(e'_1) = \emptyset)). & \end{array}$$

($\Longrightarrow$) Доказательство достаточности аналогично доказательству данному для "ленивой" семантики, так как для корректно таймированных временных сетей-процессов компонента μ морфизма является всюду определённой функцией.

($\Longleftarrow$) Доказательство необходимости полностью повторяет рассуждения, данные в соответствующей части доказательства утверждения 3.3, за исключением того, что для доказательства не пустоты множества Z используются следующие соображения.

Допустим обратное ($Z = \emptyset$). Пусть $e' \in \mu_0^{-1}(e^{\#}_{v_0})$, $e'' \in \mu_0^{-1}(e^{\#}_{v_1})$. Тогда, по определению морфизма, имеем, что $e', e''\ G^+\ e_0$. Возможны следующие случаи:

- $e' \,\#\, e''$. Тогда, по определению, имеем, что $e_0 \,\#\, e_0$ Противоречие с определением сети-процесса.
- $\neg(e' \,\#\, e'')$. Тогда, так как TN_0 — корректно таймированная, существует временное вычисление $(\pi, T) \in TComp_e(TN)$ такое, что $e', e'' \in E_\pi$. Так как $e^{\#}_{v_0} \,\#\, e^{\#}_{v_1}$, то $v_i(\pi) \notin Comp(N_0)$ $(i = 0, 1)$ и, следовательно, $v_i(\pi, T) \notin TComp_e(TN_0)$ — противоречие с пунктом *б* определения морфизма.

Необходимость доказана.

3.3. Подкатегории, в которых все морфизмы — эпиморфизмы

Пусть $\mathcal{EPI}_x$ — подкатегория $\mathcal{TNP}_x$ $(x \in \{e, l\})$, в которой морфизмы — морфизмы в $\mathcal{TNP}_x$, а объекты — временные сети-процессы, такие что по определению временная сеть-процесс $TN = (N = (E, B, G, L), Eot, Lot)$ принадлежит $\mathcal{EPI}_x$, если N — разнопомеченый C-процесс (т.е. такой, что пометка любых неравных друг другу событий различна) и $L(E) = Act$.

Утверждение 3.7. *Все морфизмы в* $\mathcal{EPI}_x$ *— эпиморфизмы.*

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что существуют временные сети-процессы $TN_i = (N_i = (E_i, B_i, G_i, L_i), Eot_i, Lot_i) \in$

$\mathcal{EPI}_x$ ($x \in \{e, l\}$, $i \in \{0, 1\}$) и морфизм $u = (\mu, \lambda) : TN_0 \to TN_1$ такие, что u — не эпиморфизм.

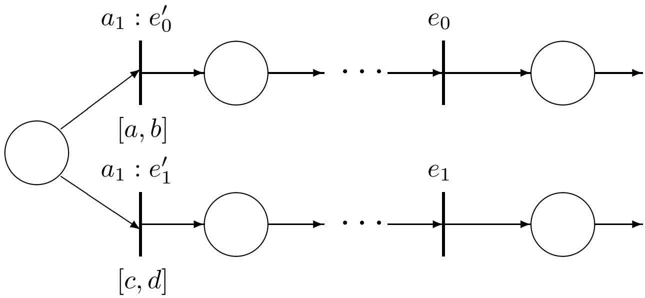
Из критерия эпиморфизма следует, что μ не является сюръективной функцией. Следовательно, существует событие $e \in E_1 \setminus \mu(E_0)$. По определению $\mathcal{EPI}_x$, $L_0(E_0) = L_1(\mu(E_0) = L_1(E_1) = Act$, т.е. существует событие $e' \in \mu(E_0)$ такое, что $L_1(e') = L_1(e)$. Это противоречит разнопомеченности TN_1. Утверждение доказано.

3.4. Подкатегории, в которых все морфизмы — мономорфизмы

Пусть $\mathcal{MONO}_x$ — подкатегория $\mathcal{TNP}_x$ ($x \in \{e, l\}$), в которой морфизмы — морфизмы в $\mathcal{TNP}_x$ и объекты — временные сети-процессы, удовлетворяющие следующему условию: для всех событий $e_0 \neq e_1$ верно:

$$\begin{aligned} e_0 \# e_1 \Rightarrow \quad & \exists e'_0, e'_1 \diamond e'_0 \neq e'_1 \;\&\; e'_0 \#' e'_1 \;\&\; e'_0\, G^*\, e_0 \;\& \\ & \&\; e'_1\, G^*\, e_1 \;\&\; (\mathcal{D}(e'_0) \cap \mathcal{D}(e'_1) = \emptyset \vee L(e'_0) \neq L(e'_1)). \end{aligned}$$

Неформально говоря, условие, налагаемое нами на временные сети-процессы, запрещает ситуации, аналогичные представленной на рис. 4.



$$[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$$

Рис. 4

Утверждение 3.8. *Все морфизмы в $\mathcal{MONO}_x$ — мономорфизмы.*

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что существуют временные сети-процессы $TN_0 = (N_0 = (E_0,\ B_0,\ G_0,\ L_0),\ Eot_0,\ Lot_0)$, $TN_1 = (N_1 = (E_1, B_1, G_1, L_1), Eot_1, Lot_1)$, $TN_0, TN_1 \in \mathcal{MONO}_x$ ($x \in \{e, l\}$, и морфизм $u = (\mu, \lambda) : TN_0 \to TN_1$ такие, что u — не мономорфизм.

Тогда, согласно критериям мономорфизмов (которые совпадают для различных семантик в силу требования корректной таймированности TN_0 и TN_1 в случае "энергичной" семантики), имеем: существуют некоторые события $e_0, e_1 \in E_0$ такие, что $\mu(e_0) = \mu(e_1)$ и не выполнено условие, налагаемое критерием на такие события. Т.е.:

$$\forall e_0', e_1' \in E_0 \diamond \quad (e_0' \neq e_1' \ \&\ e_0' \#' e_1' \ \&\ e_0' \, G_0^* \, e_0 \ \&\ e_1' \, G_0^* \, e_1) \Rightarrow (\mathcal{D}(e_0') \cap \mathcal{D}(e_1') \neq \emptyset).$$

Это противоречит условию утверждения. Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Котов В.Е.** Сети Петри. — М.: Наука, 1984. — 160с.
2. **Alur R., Dill D.** The theory of timed automata // Lect. Notes Comput. Sci. — 1991. — Vol. 600. — P. 45–73.
3. **Aceto L., Murphi D.** Timing and causality in process algebra // Acta Informatica. — 1996. — Vol. 33(4). — P. 317–350.
4. **Berthomieu B., Diaz M.** Modelling and verification of time dependent systems using time Petri nets // IEEE Trans. Software Eng. — 1991 — Vol. 17(3). — P. 259–273.
5. **Best E., Fernandez C.** Nonsequential Processes: a Petri net view. — Springer-Verlag, 1988. — 130p. — (Springer EATCS Monographs on Theoretical Computer Sci.; Vol. 10).
6. **Bourceux F.** Handbook Of Categorical Algebra Vol. I. Basic category theory. — Cambridge: Cambridge University Press., 1994. — 361 p.
7. **Casley R.T., Crew R.F., Meseguer J., Pratt V.R.** Temporal structures // Mathematical Structures in Computer Science. — 1991. — Vol. 1(2). — P. 79–213. 163–181.
8. **Joyal A., Nielsen M., Winskel G.** Bisimulation from open maps. // Information and Computation. — 1996. — Vol. 127(2). — P. 164–185.
9. **Katoen J-P.** Quatitative and Qualitative Extensions of Event Structures: Thesis doct. phylosophy (computer sci.). — Twente University, 1996. — 304 p.
10. **Schneider S., Davies J., Jackson D.M., Reed G.M., Reed J.M., Roscoe A.W.** Timed CSP: theory and practice // Lect. Notes Comput. Sci. — 1991. — Vol. 600. — P. 640–675.
11. **Virbitskaite I.B.** Charecterizing timed net processes categorically // Lect. Notes Comput. Sci. — 2001. — Vol. 2127. — P. 128–141.

Р. С. Дубцов

КРИТЕРИИ ЭПИ- И МОНОМОРФИЗМА В КАТЕГОРИЯХ МОДЕЛЕЙ С РЕАЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Препринт
113

Рукопись поступила в редакцию 10.02.2004
Рецензент Е. Н. Боженкова
Редактор З. В. Скок

Подписано в печать 20.04.2004
Формат бумаги 60×84 1/16 Объем 1,5 уч.-изд.л., 1,7 п.л.
Тираж 60 экз.

ЗАО РИЦ “Прайс-курьер” 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 6, тел. (383-2) 34-22-02