Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт систем информатики
им. А.П. Ершова

М.В. Коровина, О.В. Кудинов

ПОРЯДКОВО ПОЗИТИВНЫЕ ПОЛЯ II

Препринт

Новосибирск 2025

В статье изучаются позитивные сигма-структуры для языка строго упорядоченных колец и полей применительно к упорядоченным полям, используемых в вычислениях с непрерывными данными. Класс порядково позитивных полей отражает особенности вычисления с непрерывными данными, где отношение равенства в большинстве случаев не является разрешимым и как следствие вычислимым, а естественным является требования вычислимо перечислимости строгого порядка и вычислимости базисных операций Исследованы алгебраические расширения порядково позитивных полей в архимедовом и не-архимедовых случаях. Доказана замкнутость данных классов, относительно алгебраических расширений, что позволяет использовать инструментарий и   аппарат теории нумераций, а также наследовать свойства оригинальных полей, в частности вычислимо перечислимость порядка и вычислимость операций сложения и умножения и частичная вычислимость обратной функции. Доказано, что порядковые топологии порядково позитивного поля и его алгебраического расширения согласованы. В архимедовом и неархимедовом случаях разработан алгоритм построения алгебраического расширения порядково позитивного поля, содержащего корни заданного многочлена. На его основе доказано, что класс порядково позитивных полей замкнут относительно взятия вещественного замыкания.

Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
A.P. Ershov Institute of Informatics Systems

M.V. Korovina, O.V. Kudinov

ORDER POSITIVE FIELDS II

Preprint

Novosibirsk 2025

In this paper we study positive sigma- structures in the language of strongly ordered rings and fields applied to ordered fields used in computations with continuous data. The class of order positive fields reflects the specifics of computations with continuous data, where in most cases the equality relation is not decidable and, therefore, non-computable, and the natural requirements are computable enumerability of strict order and computability of basic operations. Algebraic extensions of order positive fields are studied in the Archimedean and non-Archimedean cases. The closure of these classes under algebraic extensions is proven, allowing the use of the tools of numbering theory, as well as the inheritance of properties of the original fields, in particular, computably enumerable ordering, computability of addition and multiplication operations, and partial computability of the inverse function. It is proven that the order topologies of an order-positive field and its algebraic extension are compatible. In both the Archimedean and non-Archimedean cases, an algorithm is developed for constructing an algebraic extension of an order-positive field containing the roots of a given polynomial. Based on this algorithm, it is proven that the class of order positive fields is closed under taking the real closure.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе продолжает изучаться класс порядково позитивных полей, введенных в [6]. Знакомство с этой предыдущей работой желательно, но не является обязательным.

Напомним, что данный класс является собственным расширением класса упорядоченных вычислимых полей, отличительной особенностью которого является отсутствие требования разрешимости равенства. Одними из примеров таких полей служат примитивно рекурсивные действительные числа, расширения рациональных чисел вычислимыми последовательнастями вычислимых действительных чисел для которых равенство не разрешимо.

Значительную роль в теории вычислимых полей играет известная теорема Ершова-Мэдисона [2, 8], обеспечивающая инструменты для эффективного строения вычислимого представления вещественного замыкания заданного упорядоченного вычислимого поля. Поэтому естественно возникает вопрос, справедлив ли обобщенный результат для полей положительного порядка. В данной работе мы даем положительный ответ на данный вопрос. Для этого мы достаточно полно описываем теорию конечных расширений порядково позитивных полей и на этой основе устанавливаем, что класс порядково позитивных полей замкнут относительно конструкции вещественного замыкания.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы отсылаем читателя к [1, 7] для ознакомления с основными свойствами многочленов и вещественно замкнутых полей, к [9] для основных определений и фундаментальных понятий вычислимых колец и полей, к [2, 3] для основ теории вычислимых (конструктивных) моделей, к [6] для свойств порядково позитивных полей. Мы фиксируем стандартное обозначение $c_n : \omega^n \to \omega$ для канторовской нумерации n-ок. Также мы используем $[A, B]_L = \{x \in L \mid A \leq x \leq B\}$ и $(A, B)_L = \{x \in L \mid A < x < B\}$ для обозначения замкнутых и открытых интервалов в упорядоченном поле L.

В данной статье мы рассматриваем счетное строго упорядоченное поле (F, ν) с его нумерацией $\nu : \omega \to F$ как σ-структуру в языке $\sigma = (+, \cdot, 0, 1, <)$. Напомним определение порядково позитивных полей и их свойства, используемые в данной статье.

Определение 1 *Поле (F, ν) – порядково позитиво, а нумерация ν – его порядково позитивное представление, если выполнены условия:*

1. *(F,ν)– эффективная алгебра, то есть все операции вычислимы на номерах.*

2. *$\nu^{-1}(<) = \{(n,m) \mid \nu(n) < \nu(m)\}$ – вычислимо перечислимо.*

3. *Существует частично вычислимая функция $g : \omega \to \omega$ такая, что*
$$\nu(n) \neq 0 \to g(n)\downarrow \wedge\, \nu(n)^{-1} = \nu(g(n)).$$

Предложение 1 *[6] Если поле (F,α) является эффективной алгеброй и $\alpha^{-1}(<)$ – вычислимо перечислимо, тогда возможно эффективно построить нумерацию β, индуцированную α, такую, что (F,β) удовлетворяет условиям (1–3).*

Далее, негласно во всех доказательствах порядковой позитивности мы будем использовать предложение 1, которое позволяет опустить проверку существования функции g из определения 1. Примеры порядково позитивных полей, включающие поле примитивно-рекурсивных вещественных чисел, можно найти в [6].

По аналогии с [5] введем понятие индекса порядково позитивного поля, которое приводит к возможности говорить о вычислимых последовательностях $\{F_i\}_{i\in\omega}$ порядково позитивных полей стандартным образом – требуется вычислимость последовательности некоторых их индексов.

Определение 2 *Пусть (F,ν) – порядково позитивное поле. Назовем число $i_F = c_4(a,b,c,d)$ его индексом, если выполняется следующее для всех k_1, k_2, $n \in \omega$:*

- $\varkappa_a = g_1$ *и* $\nu(k_1) + \nu(k_2) = \nu(g_1(k_1,k_2))$,
- $\varkappa_b = g_2$ *и* $\nu(k_1) \cdot \nu(k_2) = \nu(g_2(k_1,k_2))$,
- $\varphi_c = g_3$ *и* $\nu(n)^{-1} = \nu(g_3(n))$, *если* $\nu(n) \neq 0$,
- $W_d = \{c_2(k_1,k_2) \mid \nu(k_1) < \nu(k_2)\}$,

где $\varkappa$ – клиневская нумерация 2-местных ч.в.ф, φ – клиневская нумерация 1-местных ч.в.ф, $\{W_n \mid n \in \omega\}$ – нумерация Клини в.п.м.

3. СОГЛАСОВАННОСТЬ ТОПОЛОГИЙ

В начале параграфа стоит сказать несколько слов о порядковой топологи, эффективно открытых множествах в этой топологии и их номерах. Порядковой топология на упорядоченной структуре $\mathcal{M}$ имеет базу, состоящую из открытых интервалов вида (a,b), где $a<b$. Если какая-то база топологии счетна и имеет нумерацию λ, то эффективно открытым (относительно этой нумерации) называют множество вида $\cup_{n\in W_k}\lambda(n)$ для подходящего вычислимо перечислимого множества W_k и k является индексом этого эффективно открытого множества. Ясно, что для порядково позитивного поля (K,μ) база порядковой топологии состоит из интервалов $(\mu(n),\mu(m))_K$, где $\mu(n)<\mu(m)$, и она обладает естественной нумерацией λ.

Предложение 2 *Пусть F – упорядоченное поле и K – его алгебраическое расширение. Тогда в порядковой топологии F является подпространством K. Если (F,ν) и (K,μ) являются порядково позитивными полями, причем $\nu\le_c\mu$, а множество $\mathcal{U}\subseteq K$ – эффективно открыто в топологии τ_K, то множество $\mathcal{U}\cap F$ – эффективно открыто в топологии τ_F, то есть согласованы и эффективные версии топологий.*

Доказательство предложения. Пусть $(a,b)_K$ – открытый интервал в K и $(a,b)_K\cap F\neq\emptyset$. Выберем $c\in F$ такой, что $c\in(a,b)_K$, тогда $0\in(a-c,b-c)_K$. Пусть $\alpha=b-c\in K$, тогда $\alpha>0$, в силу алгебраичности над F (см. [7]) имеется оценка $|\alpha^{-1}|<d$, $d\in F$, откуда следует, что $0<d^{-1}<\alpha$. Аналогично для $\beta=a-c<0$ имеем $|\beta^{-1}|<e$, $e\in F$, откуда $0<e^{-1}<-\beta$. Мы получаем $(-e^{-1},d^{-1})_F\subset(\beta,\alpha)_K$, осталось лишь сдвинуть на c, тогда $c\in(c-e^{-1},c+d^{-1})_F\subset(a,b)_K$. Отсюда прямо вытекает, что F является подпространством K, то есть пересечение открытого $\mathcal{U}$ в K с F открыто в F.

Осталось показать, что если $\mathcal{U}=(a,b)_K=(\mu(n),\mu(m))_K$, то $\mathcal{U}\cap F$ – эффективно открыто в F. Пусть $\nu(k)=\mu(h(k))$ для всех k, где h – о.в.ф. Не имея равномерного способа определять минимальный многочлен для $\alpha=b-c$, мы просто используем перебор – сначала $c=\nu(k_0)$ для k_0 с условием $a<\mu(h(k_0))<b$, затем $d=\nu(k_1)=\mu(h(k_1))$ для числа k_1 с условием $0<\alpha^{-1}<d$ и $e=\nu(k_2)$ с условием $0<e^{-1}<\beta=c-a$. В подсчетах выше мы имеем вычислимо перечислимое множество $I=\{k_0\mid\mu(n)<\mu(h(k_0))<\mu(m)\}$ и какие-то ч.в.ф $g_1(n,m,k_0)$ и $g_2(n,m,k_0)$ с областью определения $\{(n,m)\mid\mu(n)<\mu(m)\}\times I$, которые по k_0 вычисляют числа k_1 и k_2. Итого, множество

$$(a,b)_K\cap F=\bigcup_{k_0\in I}\Big(\nu(k_0)-\nu(g_2(n,m,k_0)^{-1}),\nu(k_0)+\nu(g_1(n,m,k_0)^{-1})\Big)_F$$

является эффективно открытым в F фактически по определению порядковой позитивности ν. Отсюда вытекает и переход от $\mathcal{U}$ к $\mathcal{U} \cap F$ в общем случае. $\square$

4. ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЗАМЫКАНИЕ ПОРЯДКОВО ПОЗИТИВНОГО ПОЛЯ

Обозначим $\overline{F} = [F]_{rcl}$ – вещественное замыкание поля F, D_f обозначает дискриминант многочлена f, $\mathrm{Res}(f,g)$ результант многочленов f и g.

В дальнейшем мы часто говорим о построении порядково позитивных представлений промежуточных полей $F \leq F_1 \leq \overline{F}$, где расширение $F_1 \geq F$ – конечно, например оно может быть устроено добавлением к F одного или нескольких корней в $\overline{F}$ многочлена $f \in F[x]$. Каждый раз имеем в виду, что мы выбираем некую копию $\widetilde{F}$ поля F_1 такую, что есть изоморфизм $\varphi : \widetilde{F} \to F_1$, $\varphi|_F = \mathrm{id}_F$, более удобную для наших целей, и предлагаем порядково позитивное представление $\widetilde{\nu}$ этой копии. При желании порядково позитивное представление может быть создано и для поля F_1 как композиция $\varphi \circ \widetilde{\nu}$, но это не всегда необходимо.

Кроме того, стоит напомнить, что общее число корней многочлена $f \in F[x]$ в $\overline{F}$ (как и число всех его корней в $[A,B]_{\overline{F}}$) не зависит от выбора $\overline{F}$, в конечном итоге эти величины однозначно определяются методом Штурма [1], хоть последний и требует проверок на равенство возникающих элементов поля F, то есть не вполне конструктивен.

Для нумерованных полей и их расширений полезно следующие обозначение, которое мы используем в следующем предложении. Для $\widetilde{F} \geq F$ пишем $(\widetilde{F}, \widetilde{\nu}) \succeq (F, \nu)$, если ν сводится к $\widetilde{\nu}$, то есть для подходящей вычислимой функции $f : \omega \to \omega$ выполняется $\nu = \widetilde{\nu} \circ f$.

Предложение 3 *Пусть (F, ν) –порядково позитивного поле. Для любого $n > 0$, унитарного $f \in F[x]$ с $\deg(f) = n$ и для любых A, $B \in F$ с условием $A < B$ выполняется следующее:*

1. *Множества*
$$\{y \in F \mid y > \sup_{x \in [A,B]_{\overline{F}}} f(x)\},$$
$$\{y \in F \mid y < \sup_{x \in [A,B]_{\overline{F}}} f(x)\}$$
эффективно открыты и номера этих множеств находятся эффективно по номерам f, A, B и индексу поля F.

2. *Если многочлен f не имеет кратных корней, то для подходящего конечного порядково позитивного расширения $(\widetilde{F}, \widetilde{\nu}) \succeq (F, \nu)$ эффективно находится такое множество $\{\langle k_i, m_i \rangle \in \omega^2 \mid 0 < i \leq m\}$ номеров интервалов $(A_i, B_i)_{\overline{F}}$, где $A_i = \widetilde{\nu}(k_i)$ и $B_i = \widetilde{\nu}(m_i)$, что для любого $i < m$ либо $A_{i+1} > B_i$ либо $k_{i+1} = m_i$ и все корни f из $\overline{F}$ находятся в $\bigcup_{i \leq m}(A_i, B_i)_{\overline{F}}$, в каждом $(A_i, B_i)_{\overline{F}}$ ровно один корень f. При этом индекс $\widetilde{F}$ и индекс функции, сводящей ν к $\widetilde{\nu}$, тоже находится эффективно по номеру f и индексу поля F.*

3. *Если многочлен f не имеет кратных корней, то поле $\widetilde{F}$, полученное присоединением к F всех корней f из $\overline{F}$, является порядково позитивным, оно имеет порядково позитивное представление $\widetilde{\nu}$ такое, что $\nu < \widetilde{\nu}$. При этом индекс функции, сводящей ν к $\widetilde{\nu}$, индекс поля $\widetilde{F}$ и конечный набор чисел, содержащий ровно по одному номеру каждого корня многочлена f в $\widetilde{F}$ находятся эффективно по номеру f и индексу F.*

Доказательство предложения. Проведем сквозную индукцию с параметром $n = \deg(f)$. Для доказательства нам понадобятся следующие определение и леммы.

Для многочлена f определим $f_\delta(x) = f(x) - \delta \cdot x$, где $\delta \in F$. Говорим, что элемент $\delta \in F$ *допустим*, если $f'_\delta(x) = f'(x) - \delta$ не имеет кратных корней. Из определения допустимости ясно следует, что

а) допустимы почти все (за исключением конечного числа) элементы поля F,

б) множество $\{n \in \omega \mid \delta = \nu(n)$ – допустим$\}$ является вычислимо перечислимым.

Пункт а) следует из определения – недопустимы в точности корни дискриминанта $D_{f'(x)-\delta}$. Для проверки пункта б) достаточно перечислять $n \in \omega$ для которых дискриминант многочлена $f'(x) - \delta$ отличен от 0, что обусловлено определением порядково позитивности поля (F, ν).

Более того, пункт б) выполняется равномерно по f, то есть по номеру унитарного многочлена $f \in F[x]$ можно вычислить номер этого множества (перед этим надо стандартным образом задать нумерацию кольца многочленов $F[x]$, которую можно найти, например, в [5]).

Лемма 1 *Для любых $f \in F[x]$, A, $B \in F$ с условием $A < B$ и $y \in F$ выполняется следующее*

1. $y > \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x)$ *тогда и только тогда, когда существует допустимое* $\delta > 0$ *такое, что* $y > \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f_\delta(x) + \delta \cdot \max\{|A|, |B|\}$.

2. $y < \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x)$ *тогда и только тогда, когда существует допустимое* $\delta > 0$ *такое, что* $y < \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f_\delta(x) - \delta \cdot \max\{|A|, |B|\}$.

Доказательство леммы. Напомним, что существует $z = \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x) = \max_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x)$ в $\overline{F}$ (соответствующий факт об $\mathbb{R}$ является общеизвестным и является элементарным свойством, поэтому переносится на все вещественно замкнутые поля). Это замечание является стандартным, мы неоднократно используем подобную идею переноса в дальнейших рассуждениях в данной работе.
1. $\Rightarrow$) В силу $y \in (z, +\infty)_{\overline{F}}$ по предложению 2 мы получаем $(y - 3\epsilon, y + 3\epsilon)_F \subseteq (z, +\infty)_{\overline{F}}$ для подходящего $\epsilon > 0$, $\epsilon \in F$. Тогда $y > z+2\epsilon$. Выберем $\delta > 0$ в F такое, чтобы $\delta\cdot\max\{|A|, |B|\} < \epsilon$ и δ – допустим. Такое δ искомо, так как $y > \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f_\delta(x)+\epsilon$ в силу $|f(x)-f_\delta(x)| \leq \delta\cdot\max\{|A|, |B|\}$ для $x \in [A, B]_{\overline{F}}$ и $y > \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x) + 2\epsilon$, а также $\delta \cdot \max\{|A|, |B|\} < \epsilon$. 2. $\Rightarrow$) В силу $y \in (-\infty, z)_{\overline{F}}$ по предложению 2 мы получаем $(y - 3\epsilon, y + 3\epsilon)_F \subseteq (-\infty, z)_{\overline{F}}$ для подходящего $\epsilon > 0$, $\epsilon \in F$. Тогда $y < z - 2\epsilon$. Выберем $\delta > 0$ в F такое, чтобы $\delta \cdot \max\{|A|, |B|\} < \epsilon$ и δ – допустим. Такое δ искомо, так как $y < \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f_\delta(x) - \epsilon$ в силу $|f(x) - f_\delta(x)| \leq \delta \cdot \max\{|A|, |B|\}$ для $x \in [A, B]_{\overline{F}}$ и $y < \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x) - 2\epsilon$, а также $\delta \cdot \max\{|A|, |B|\} < \epsilon$.
1. $\Leftarrow$), 2. $\Leftarrow$) В силу неравенства $|f(x) - f_\delta(x)| \leq \delta \cdot \max\{|A|, |B|\}$ для $x \in [A, B]_{\overline{F}}$ утверждения очевидны. $\square$

Лемма 2 *Пусть* $h_1(x), \ldots, h_s(x)$ *– конечный список из* $F[x] \setminus \{0\}$. *Тогда множество*

$$C = \{\alpha \in F \mid \text{ для } a(x) = f(x) - \alpha, \text{ все } \mathrm{Res}(a(x), h_i(x)) \neq 0 \text{ при } i = 1, \ldots, s\}$$

является коконечным, в частности плотным в F.

Доказательство леммы. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ равенство $\mathrm{Res}(f(x) - \alpha, h_i(x)) = 0$ выполняется лишь при конечном числе значений α, отсюда и следует утверждение леммы. $\square$
Пункт 1. Мы ищем части требуемых множеств $X = \{y \in F \mid y > \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x)\}$ и $Y = \{y \in F \mid y < \sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} f(x)\}$, используя различные конечные расширения поля F так, что в итоге множества X и Y будут состоять из объединений соответствующих частей.

Преимущество допустимых $\delta \in F$ в том, что, пользуясь индукционным предложением, по пункту 3 мы можем присоединить к F все корни многочлена f'_δ и получить его порядково позитивное расширение $\widetilde{F}$, вычислив его индекс. Опишем более формально наше построение множеств X и Y. Для каждого допустимого $\delta > 0$, $\delta \in F$ определяем конечное множество J_δ (оно может быть пустым), состоящее в точности из всех корней f'_δ и подходящее порядково позитивное расширение $\widetilde{F}_\delta$, содержащее J_δ, номер которого эффективно зависит от $m \in \nu^{-1}(\delta)$ (само m и $\widetilde{F}_\delta$ фиксируются).

Далее, для каждого допустимого $\delta > 0, \delta \in F$ определим множества

$$\begin{aligned} X_\delta = \ & \{y \in F \mid y > f_\delta(A) + \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\} \text{ и} \\ & y > f_\delta(B) + \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\} \text{ и} \\ & (\forall a \in J_\delta)\, y > f_\delta(a) + \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\} \text{ в } \widetilde{F}_\delta\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Y_\delta = \ & \{y \in F \mid y < f_\delta(A) - \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\} \text{ или} \\ & y < f_\delta(B) - \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\} \text{ или} \\ & (\exists a \in J_\delta)\, y < f_\delta(a) - \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\} \text{ в } \widetilde{F}_\delta\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что X_δ и Y_δ это пересечения эффективно открытых в $\widetilde{F}_\delta$ множеств с F, поэтому по предложению 2 множества X_δ и Y_δ эффективно открыты в F. Поскольку многочлен f_δ принимает максимально возможные значения на отрезке $[A, B]_{\overline{F}}$ (по причине переноса, отмеченного в лемме 1), мы имеем следующие эквивалентности:

$$y \in X_\delta \leftrightarrow y > \sup_{x \in [A,B]_{\overline{F}}} f_\delta(x) + \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\}$$

и

$$y \in Y_\delta \leftrightarrow y < \sup_{x \in [A,B]_{\overline{F}}} f_\delta(x) - \delta \cdot \max\{|A|,\, |B|\}.$$

По лемме 1 отсюда получаем

$$y \in X \leftrightarrow \text{ существует допустимое } \delta > 0 \text{ такое, что } y \in X_\delta,$$

$$y \in Y \leftrightarrow \text{ существует допустимое } \delta > 0 \text{ такое, что } y \in Y_\delta,$$

откуда по лемме 2 следует эффективная открытость X и Y в F.
Пункт 2. Предварительный интервал $[A, B]_{\overline{F}}$, $A,\ B \in \overline{F}$, который содержит все корни $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ из $\overline{F}$, находим в силу известной оценки для корней

$$x \le \max\Big(1, \sum_{i=0}^n |a_i|\Big), \text{ при этом } f(A) \neq 0,\ f(B) \neq 0.$$

Поскольку вполне возможно, что производная f' имеет кратные корни, мы не можем напрямую использовать индуктивное предположение для получения $\widetilde{F}$ присоединением всех корней f' из $\overline{F}$. Вместо этого, используя лемму 2, мы находим допустимые $\pm\delta \in F$ с условием $0 < \delta < \lambda$ (выбор λ объясняется ниже) и многочлены $\widetilde{f} = f' \pm \delta$, для которых выполняется:

- $\widetilde{f}$ без кратных корней,
- $|f'(x) - \widetilde{f}(x)| < \frac{\lambda}{2}$ для любого $x \in [A, B]_{\overline{F}}$,
- $|f'(\beta)| > \lambda$ для любого $\beta \in [A, B]_{\overline{F}}$ с условием $f(\beta) = 0$,
- $f'(A),\ f'(B) \notin \{-\delta, +\delta\}$.

Стоит отметить, что λ находится эффективно, используя известное разложение в $F[x]$ (см. [1]):

$$f(x)C(x) + f'(x)D(x) = \mathrm{Res}(f, f') \text{ для } C(x),\ D(x) \in F[x]$$

где $\deg(D) < \deg(f) = n$ и оценку

$$|f'(\beta)| > \frac{|\mathrm{Res}(f, f')|}{\sup_{x\in[A,B]_{\overline{F}}} |D(x)|} > \lambda.$$

Если $D(x) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i x^i$, $m < n$, (ничего не известно о том, какие из его коэффициентов равны 0), то очевидна оценка

$$|D(x)| < \sum_{i=0}^{m} (|\beta_i| + 1)E^i + 1, \text{ где } E = max(|A|,\ |B|)$$

для любого $x \in [A, B]_{\overline{F}}$. Это означает, что можно оценить D на $[A, B]_{\overline{F}}$ сверху, что и ведет к успешному поиску λ в F.

Пусть конечное множество J_δ образовано элементами A, B и всеми корнями многочленов $\widetilde{f}$ для выбранного δ. Очевидно, что его элементы не являются корнями многочлена f.

Дальнейшая конструкция призвана поставить в биективное соответствие корни многочлена f и определенные пары соседних элементов из J_δ.

Предположим, что β – некоторый корень многочлена f на отрезке $[A, B]_{\overline{F}}$. Тогда для некоторых пар $\langle a,\ b\rangle \in \overline{F} \times \overline{F}$ выполняется

- $a < b$, a, $b \in [A, B]_{\overline{F}}$ и $\beta \in (a, b)_{\overline{F}}$,

- $f'(a) = 0$ или $a = A$,
- $f'(b) = 0$ или $b = B$,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Из этих пар выбираем пару $\langle a, b\rangle$ соседних элементов таких, что a – максимальный, а b – минимальный из всех возможных элементов.
Рассмотрим все случаи для a. Пусть $f'(a) = 0$ и $a \geq A$. Тогда по теореме о промежуточном значении найдется $\beta_1 \in (a, \beta)_{\overline{F}}$ с условием $f'(\beta_1) \in \{-\delta, \delta\}$, причем $f'(\beta_1) \cdot f'(\beta) > 0$. Выбираем максимальное такое β_1, $\beta_1 \in J_\delta$. При этом f и f' не меняет знаки в интервале $(\beta_1, \beta)_{\overline{F}}$. Поэтому пара β_1 – левый элемент искомой пары. Пусть $a = A$ и $f'(a) \neq 0$. В этом случае также может найтись $z \in \overline{F}$ такое, что $z \in (a, \beta)$ и $f'(z) = \pm\delta$ (знак $f'(z)$ такой же как у $f'(\beta)$). Если оно нашлось, то полагаем $\beta_1 = z$ для максимально возможного z, $\beta_1 \in J_\delta$. Если его нет, то полагаем $\beta_1 = A$. В обоих случаях f не меняет знака в интервале $(\beta_1, \beta)_{\overline{F}}$. Поэтому β_1 – левый элемент искомой пары. Аналогично рассматриваем случаи для b и выбираем по нему $\beta_2 \in J_\delta$.

Уже установлено следующее: если $f(\beta) = 0$ и $\beta \in (A, B)_{\overline{F}}$, то для соседних элементов $\beta_1 < \beta_2$ из J_δ выполнено $\beta \in (\beta_1, \beta_2)_{\overline{F}}$ и $f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) < 0$.

С другой стороны, если нашлись какие-то соседние элементы β_1, β_2 в J_δ с условием $f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) < 0$, то по теореме о промежуточных значениях существует элемент $\beta \in \overline{F}$ такой, что $\beta \in (\beta_1, \beta_2)_{\overline{F}}$ и $f(\beta) = 0$. Этих элементов не может быть более одного. Действительно, допустим противное – нашелся еще элемент $\beta^* \in (\beta_1, \beta_2)_{\overline{F}}$ отличный от β такой, что $f(\beta^*) = 0$. Тогда по теореме Ролля [1] найдется $a^* \in (\beta^*, \beta)_{\overline{F}}$ с условием $f'(a^*) = 0$, что противоречит выбору элементов a, β_1, а именно $a \leq \beta_1 < \beta$. Напомним, что a – максимальный, при этом каждый корень f расположен между соседними элементами $\beta_1 < \beta_2$ из J_δ такими, что $f(\beta_1) f(\beta_2) < 0$. Тогда $\widetilde{F} = F(\{\alpha \mid \alpha \in J_\delta\})$. Выше уже отмечено, что для $\alpha \in J_\delta$ имеем $f(\alpha) \neq 0$. Поэтому вышеуказанные интервалы $(\beta_1, \beta_2)_{\overline{F}}$ (с условием $f(\beta_1) f(\beta_2) < 0$) и нужно выбирать в качестве искомых $(A_i, B_i)_{\overline{F}}$. Функция, сводящая ν к $\widetilde{\nu}$ строится в пункте 3.
Пункт 3. Пусть $(A_i, B_i)_{\overline{F}}$, $i = 1, \ldots, m$ – интервалы, построенные в пункте 2. Если α_i – корень f из $(A_i, B_i)_{\overline{F}}$, то достаточно представить $\widetilde{F}$ как $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})(\alpha_m)$ и объяснить как строить порядково позитивное представление поля $F_i = F_{i-1}(\alpha_i)$, то есть научиться добавлять по одному корню к уже построенному полю. Формально, $F_i = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, $F_{i+1} = F_i(\alpha_{i+1})$, $i < m$, и таким образом будет построено $F_m = \widetilde{F}$.

Итак, без потери общности можно считать, что α – единственный в $\overline{F}$ корень f из отрезка $(A,B)_{\overline{F}}$. Мы хотим построить диаграмму поля $F(\alpha)$ в языке $\sigma = (+,\cdot,0,1,<)$. Ясно, что для этого достаточно вычислимо перечислить все номера многочленов из $\{a(x) \in F[x] \mid a(\alpha) > 0\}$, потому что каждый элемент из $F(\alpha)$ представим в виде $a(\alpha)$, где $a \in F[x]$ и $\deg(a) < \deg(f)$. Тем самым, перечисление μ многочленов $a \in F[x]$ ведет к перечислению $\widetilde{\nu}$ всех элементов поля $F(\alpha)$ по формуле $\widetilde{\nu}(n) = \mu(n)(\alpha)$, которое индуцирует порядково позитивное представление $F(\alpha)$. В частности, некоторый номер самого α – это μ-номер многочлена $a(x) \equiv x$.

Сначала каждый многочлен $a \in F[x]$ поделим с остатком на f в кольце $F(x)$, $a(x) = f(x)\cdot b(x) + d(x)$, где $d(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^{n-1-i}$. Стоит отметить, что хотя элементы α_i, $i \le n-1$, находятся явно по стандартному алгоритму деления в $F[x]$ с остатком, точная степень $d(x)$ нам неизвестна.

Пусть нашлись $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ в F, $k \le n-1$, такие, что

$$\epsilon \cdot \sum_{i=0}^{k} c^{n-1-i} < \delta \wedge \bigwedge_{i=0}^{k} |\alpha_i| < \epsilon \wedge (|\alpha_{k+1}| > \epsilon \vee k = n-1),$$

где $c = \max(|A|,|B|)$. В таком случае говорим о согласованной 3-ке (δ,ϵ,k) и образуем $\widetilde{d} = \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i x^{n-1-i}$. В случае согласованности при $x \in [A,B]_{\overline{F}}$ выполняется $|d(x) - \widetilde{d}(x)| < \delta$, и при этом либо $\widetilde{d} \equiv 0$, либо $\alpha_{k+1} > \epsilon$. Примем следующие обозначение.

Условие $*$ на (δ,ϵ,k): *Для некоторых y_0, $y_1 \in F$ таких, что $y_0 > 0$, $y_1 > 0$, оба многочлена $\widetilde{d}(x) - y_0$, $\widetilde{d}(x) - y_1$ без кратных корней, причем для подходящих x_0, x_1 с*

$$\begin{cases} \widetilde{d}(x_0) = y_0 \\ \widetilde{d}(x_1) = y_1 \end{cases}$$

имеем $A < x_0 < x_1 < B$ (в уместном порядково позитивном расширении $\widehat{F} > F$) и при этом $\inf_{x\in[x_0,x_1]_{\overline{F}}} \widetilde{d}(x) > \delta$ и $f(x_0)f(x_1) < 0$.

Если для некоторой согласованной 3-ки (δ,ϵ,k) выполняются условие $*$, то $d(x) > 0$ для $x \in [x_0,x_1]_{\overline{F}}$ и, в частности, для $\alpha \in [x_0,x_1]_{\overline{F}}$, мы получаем $d(\alpha) = a(\alpha) > 0$.

Верно и обратное: из $d(\alpha) = a(\alpha) > 0$ следует существование согласованной 3-ки (δ,ϵ,k) вместе с условием $*$. Поскольку для данного $a(x) \in F[x]$ можно равномерно перечислять все согласованные 3-ки (δ,ϵ,k) с условием $*$, то можно перечислить все $a(x) \in F[x]$, для которых такие 3-ки найдутся, а это в частности $\{a(x) \mid a(\alpha) > 0\}$. Тем самым возможно вычислимое перечисление $a(x)$ с условием $a(\alpha) > 0$, что ведет к построению порядково позитивного представления поля $F(\alpha)$. Отметим еще, что из доказательства следует возможность вычислить (относительно $\widetilde{\nu}$) некоторые номера всех корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ многочлена f в $\widetilde{F}$. $\square$

Замечание 1 *Следующий пример показывает, что в пункте 2 предложения 3 нельзя обойтись без расширения $(\widetilde{F}, \widetilde{\nu})$ поля (F, ν). Пусть $F = \mathbb{Q}(t)$, где $t > \mathbb{Q}^+$. Тогда в поле F нельзя отделить корни многочлена $f(x) = (x^2 - t)(x^3 - t)$, то есть нет интервала (α, β) с $\alpha, \beta \in F$ такого, что $\sqrt{t} \in (\alpha, \beta)$, но $\sqrt[3]{t} \notin (\alpha, \beta)$.*

Теорема 1 *Вещественное замыкание порядково позитивного поля снова является порядково позитивным.*

Доказательство теоремы. Мы создаем полный список $\{f_i(x)\}_{i\in\omega}$ унитарных многочленов из $F[x]$ без кратных корней, то есть с ненулевым дискриминантом $D_{f_i} \neq 0$ и строим поле F^*, содержащее все корни из $\overline{F}$ всех многочленов f_i и порожденное ими.

Для этого Мы строим последовательность $\{F_i\}_{i\in\omega}$ порядково позитивных полей таких, что $F_{i+1} \supseteq F_i$ и $F^* = \bigcup_{i\in\omega} F_i$. Она будет вычислима в том смысле, что последовательность индексов полей – вычислима.

Построение:

- $F_0 = F$,

- F_{i+1} получается добавлением к F_i всех (из $\overline{F}$) корней f_i, $\nu_i \leq_{h_i} \nu_{i+1}$ (по пункту 3 предложения 3),

- при этом легко добиться условия: $\{h_i\}_{i\in\omega}$ – вычислимая последовательность.

По рекурсии вычисляем индекс функции $H(i,j)$ сводящей ν_i к ν_j при $i \leq j$. Тогда $\nu^*(c(i,n)) = \nu_i(n)$ будет порядково позитивным представлением F^*, последнее изоморфно $\overline{F}$ над F, то есть изоморфизм тождественен на F. $\square$

Список литературы

[1] Ван дер Варден, Алгебра, М. Наука, 1976.

[2] Ю. Л. Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, Наука, 1980.

[3] Ю. Л. Ершов, С. С. Гончаров, Конструктивные модели, Новосибирск, Научная книга, 1999.

[4] Yu. L. Ershov, Numbered fields, Proc. 3-rd Intern. Congr. for Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1967, Amsterdam, 1968, 31—35.

[5] A. Fröhlich, J. Shepherdson, Effective procedures in field theory, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 248, 1956, 407–432.

[6] М. Коровина, О. Кудинов, Порядково позитивные поля I, Алгебра и логика, 62, No 3 (2023), 307-322.

[7] S. Lang, Algebra, Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co., 1965.

[8] E. W. Madison, A note on computable real fields, J. Symbolic Logic, 35, No 2, 1970, 239—241.

[9] V. Stoltenberg-Hansen and J. V. Tucker, Computable rings and fields, In: E Grif- for (ed.), Handbook of Computability Theory, Elsevier, 1999, 363—447.