Доказательства лемм к статье «‘Истинно параллельная’ семантика непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной и устойчиво атомарной пространственной стратегиями»

Лемма 1.

Пусть $\mathcal{TN}$ — НВСП и $\sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$. Тогда существует $\widehat{\sigma} \in \widehat{\mathcal{FS}}(\mathcal{TN})$ такой, что $Untimed(\sigma) = Untimed(\widehat{\sigma})$.

Доказательство леммы 1.

По определению НВСП, имеем следующие свойства хода времени:

- $S \xrightarrow{0} S$;
- если $S \xrightarrow{\theta} S'$ и $S' \xrightarrow{\theta'} S''$ $(\theta, \theta' \in \mathbb{R}_{\geq 0})$, тогда $S \xrightarrow{\theta+\theta'} S''$;

где S, S', S'' — сосотояния НВСП $\mathcal{TN}$. Поскольку σ — конечная последовательность, то существует $\widehat{\sigma} \in \widehat{\mathcal{FS}}(\mathcal{TN})$ такой, что $Untimed(\sigma) = Untimed(\widehat{\sigma})$. $\square$

Лемма 2.

Для сечений $C, C' \in \mathcal{RCUT}(TN)$ верно:

(а) $C \preceq C' \Rightarrow C \sqsubseteq C'$;

(б) $\tau(C) = \tau(C'') = 0$ для любого $C'' \in RCut(C)$;

(в) для любого $e \in Fi(C) \cap Fi(C')$ существует $C'' \in \mathcal{RCUT}(TN)$ такой, что $e \in Fi(C'')$, $C'' \preceq C$ и $C'' \preceq C'$.

Доказательство леммы 2.

(a) Поскольку $C \preceq C'$, то существует последовательность сечений из $\mathcal{CUT}(N)$ и событий из $(\downarrow C' \setminus \downarrow C)$ вида: $C = \widetilde{C}_0\ \widetilde{e}_1\ \widetilde{C}_1 \ldots \widetilde{C}_{n-1}\ \widetilde{e}_n\ \widetilde{C}_n = C'$ $(n \geq 0)$ такая, что $\widetilde{C}_{k-1} \stackrel{\widetilde{e}_k}{\to} \widetilde{C}_k$ для всех $1 \leq k \leq n$. В силу ацикличности ПСС N, имеем $|\downarrow C' \setminus \downarrow C| = n$. Покажем индукцией по $0 \leq i \leq n$, что существует последовательность сечений из $\mathcal{RCUT}(TN)$ и событий из $(\downarrow C' \setminus \downarrow C)$ вида: $C = C_0\ e_1\ C_1 \ldots C_{n-1}\ e_n\ C_n = C'$ такая, что $C_{k-1} \stackrel{e_k}{\Rightarrow} C_k$ для всех $1 \leq k \leq n$, т.е. $C \sqsubseteq C'$.

i=0. Тогда имеем, что $C = C'$.

i>0. По предположению индукции, существует последовательность сечений из $\mathcal{RCUT}(TN)$ и событий из $(\downarrow C' \setminus \downarrow C)$ вида: $C = C_0\ e_1\ C_1 \ldots C_{i-2}\ e_{i-1}\ C_{i-1}$ такая, что $C_{k-1} \stackrel{e_k}{\Rightarrow} C_k$ для всех $1 \leq k < i$. Покажем, что существует $e_i \in (\downarrow C' \setminus \downarrow C)$ такое, что $C_{i-1} \stackrel{e_i}{\Rightarrow} C_i$.

Поскольку $\downarrow C_{i-1} \subset \downarrow C'$, то $C_{i-1} \prec C'$. Это означает, что существует последовательность $C_{i-1} \stackrel{e_1^i}{\to} C^i \to^* C'$. Тогда $e_1^i \in En(C_{i-1})$ и $e_1^i \in (\downarrow C' \setminus \downarrow C)$. Если $e_1^i \in Fi(C_{i-1})$, то $C_{i-1} \stackrel{e_i}{\Rightarrow} C_i$, где $e_i = e_1^i$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай, когда $e_1^i \notin Fi(C_{i-1})$. Пусть $En(C_{i-1}) = \{e_1^i, \ldots, e_m^i\}$ $(m > 0)$. Тогда $(C_{i-1} \setminus {}^\bullet e_j^i) \cup e_j^{i\bullet} = C_j^i \in \mathcal{CUT}(N)$, т.е. $C_{i-1} \prec C_j^i$, для всех $1 \leq j \leq m$, по определению отношения причины на сечениях.

Сначала покажем, что существует $e_j^i \in En(C_{i-1})$ такое, что $e_j^i \in Fi(C_{i-1})$ $(1 < j \leq m)$. Предположим обратное, т.е. $e_j^i \notin Fi(C_{i-1})$ для всех $e_j^i \in En(C_{i-1})$. Рассмотрим произвольное $1 \leq j \leq m$. Тогда верно, что $C_j^i \notin \mathcal{RCUT}(TN)$, т.е. $\tau(C_j^i) = \bot$. Согласно определению ВПСС, существует $\widehat{C}_j^i \in Cut(C_j^i)$ такое, что $\tau(\widehat{C}_j^i) > 0$. Ясно, что $C_{i-1} \neq \widehat{C}_j^i$. Кроме того, $\widehat{C}_j^i \notin Cut(C_{i-1})$, поскольку $\tau(C_{i-1}) \neq \bot$. Это означает, что $\widehat{C}_j^i \not\smile C_{i-1}$, т.е. $\widehat{C}_j^i \prec C_{i-1}$ или $C_{i-1} \prec \widehat{C}_j^i$. Так как $C_{i-1} \prec C_j^i$ и $\widehat{C}_j^i \in Cut(C_j^i)$, то верно, что $C_{i-1} \prec \widehat{C}_j^i$. Тогда $C_{i-1} \stackrel{e_l^i}{\to} C_l^i \prec \widehat{C}_j^i$ для некоторого $1 \leq l \leq m$. Получаем, что для любого $1 \leq j \leq m$ существует $\widehat{C}_j^i \in \mathcal{RCUT}(TN)$ такое, что $\tau(\widehat{C}_j^i) > 0$, $C_j^i \smile \widehat{C}_j^i$ и $C_l^i \prec \widehat{C}_j^i$ для некоторого $1 \leq l \leq m$.

Возможны два случая.

1. $\widehat{C}_j^i = \widehat{C}_{j'}^i$ для всех $1 \leq j, j' \leq m$. Тогда существует $1 \leq l \leq m$ такое, что $C_l^i \prec \widehat{C}_l^i$, что противоречит тому, что $C_l^i \smile \widehat{C}_l^i$.
2. $\widehat{C}_j^i \neq \widehat{C}_{j'}^i$ для некоторых $1 \leq j, j' \leq m$.

* $\widehat{C}^i_j \smile \widehat{C}^i_{j'}$. Тогда, по определению ВПСС, $\tau(\widehat{C}^i_{j'}) = \bot$, что противоречит $\tau(\widehat{C}^i_{j'}) > 0$.
* $\widehat{C}^i_j \not\smile \widehat{C}^i_{j'}$. Следовательно, по определению отношения параллелизма на сечениях, для любых $1 \leq j, j' \leq m$ верно, что $\widehat{C}^i_j \prec \widehat{C}^i_{j'}$ или $\widehat{C}^i_{j'} \prec \widehat{C}^i_j$. Поскольку N — ацикличная ПСС и множество $En(C_{i-1})$ конечно, то найдется $1 \leq s \leq m$ такое, что $\widehat{C}^i_s \preceq \widehat{C}^i_j$ для любого $1 \leq j \leq m$. Кроме того, существует $1 \leq l \leq m$ такой, что $C^i_l \preceq \widehat{C}^i_s$. Так как $\widehat{C}^i_s \preceq \widehat{C}^i_l$, то $C^i_l \preceq \widehat{C}^i_l$, в силу транзитивности отношения причины. Получили противоречие с тем, что $C^i_l \smile \widehat{C}^i_l$.

Следовательно, $Fi(C_{i-1}) \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольное $e_i \in Fi(C_{i-1})$. Тогда $e_i \in En(C_{i-1})$ и $C_i = ((C_{i-1} \setminus {}^\bullet e_i) \cup e_i^\bullet) \in \mathcal{RCUT}(TN)$, т.е. $e_i \in \downarrow C_i$ и $\tau(C_i) \neq \bot$. Более того, верно, что $C_{i-1} \overset{e_i}{\Rightarrow} C_i$. Известно, что $C^i_1 = ((C_{i-1} \setminus {}^\bullet e^i_1) \cup e^{i\bullet}_1)$, т.е. $e^i_1 \in \downarrow C^i_1$ и $\tau(C^i_1) = \bot$. Ясно, что $C_i \neq C^i_1$ и $e_i \neq e^i_1$. Тогда получаем, что $e_i \in (\downarrow C_i \setminus \downarrow C^i_1)$ и $e^i_1 \in (\downarrow C^i_1 \setminus \downarrow C_i)$. Значит, имеем, что $\neg(\downarrow C_i \subset \downarrow C^i_1)$ и $\neg(\downarrow C^i_1 \subset \downarrow C_i)$, т.е. $C^i_1 \in Cut(C_i)$. Из определения ВПСС следует, что $\tau(C_i) > 0$, так как $\tau(C^i_1) = \bot$ и $\tau(C_i) \neq \bot$, а значит, что $C_i \notin Cut(C')$, поскольку $\tau(C') \neq \bot$. Таким образом, $\downarrow C_i \subseteq \downarrow C'$ или $\downarrow C' \subseteq \downarrow C_i$. Так как $e^i_1 \in \downarrow C'$ и $e^i_1 \notin \downarrow C_i$, то $\neg(\downarrow C' \subseteq \downarrow C_i)$. Значит, имеем, что $\downarrow C_i \subseteq \downarrow C'$. Тогда верно, что $e_i \in (\downarrow C' \setminus \downarrow C)$.

(б) Рассмотрим произвольное $C'' \in RCut(C)$. Тогда $C'' \in \mathcal{RCUT}(TN)$ и $C'' \in Cut(C)$. Предположим обратное, т.е. $\tau(C'') > 0$. Значит, по определению ВПСС, $\tau(C) = \bot$, получили противоречие с $C \in \mathcal{RCUT}(TN)$.

(в) Предложение 1. Если $\widetilde{C} \in \mathcal{CUT}(N)$, то $\widetilde{C} = ({}^\bullet N \cup (\downarrow \widetilde{C})^\bullet) \setminus {}^\bullet(\downarrow \widetilde{C})$.

Доказательство предложения. Благодаря определению ПСС, имеем, что $\downarrow {}^\bullet N = \emptyset$. Тогда $\downarrow {}^\bullet N \subseteq \downarrow \widetilde{C}$, т.е. ${}^\bullet N \preceq \widetilde{C}$. Это означает, что существует последовательность сечений и событий вида: ${}^\bullet N = \widetilde{C}_0 \widetilde{e}_1 \widetilde{C}_1 \dots \widetilde{e}_n \widetilde{C}_n = \widetilde{C}$, где $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\} = \downarrow \widetilde{C}$ и $C_{i-1} \overset{e_i}{\to} C_i$, т.е. $C_i = (C_{i-1} \setminus {}^\bullet e_i) \cup e_i^\bullet$, для $1 \leq i \leq n$. В силу ацикличности ПСС N, получаем, что $\widetilde{C} = ({}^\bullet N \cup (\downarrow \widetilde{C})^\bullet) \setminus {}^\bullet(\downarrow \widetilde{C})$. □

Предложение 2. Если $\widetilde{C}, \widetilde{C}' \in \mathcal{CUT}(N)$, то существует $\widetilde{C}'' \in \mathcal{CUT}(N)$ такое, что $\downarrow \widetilde{C}'' = \downarrow \widetilde{C} \cap \downarrow \widetilde{C}'$.

Доказательство предложения. Построим индукцией по $0 \leq i \leq n$ последовательность сечений из $\mathcal{CUT}(N)$ и событий вида: ${}^\bullet N = \widetilde{C}_0 e_1 \widetilde{C}_1 \dots e_n \widetilde{C}_n = \widetilde{C}''$, где $\{e_1, \dots, e_n\} = (\downarrow \widetilde{C} \cap \downarrow \widetilde{C}')$ и $\widetilde{C}_{k-1} \overset{e_k}{\to} \widetilde{C}_k$ для $1 \leq k \leq n$.

i=0. Тогда имеем, что $\widetilde{C}'' = {}^\bullet N$.

i>0. По предположению индукции, существует последовательность сечений из $\mathcal{CUT}(N)$ и событий из $(\downarrow \widetilde{C} \cap \downarrow \widetilde{C}')$ вида: ${}^\bullet N = \widetilde{C}_0 e_1 \widetilde{C}_1 \ldots e_{i-1}\widetilde{C}_{i-1}$ такая, что $\widetilde{C}_{k-1} \xrightarrow{e_k} \widetilde{C}_k$ для $1 \leq k < i$. Покажем, что существует $e_i \in (\downarrow \widetilde{C} \cap \downarrow \widetilde{C}')$ такое, что $\widetilde{C}_{i-1} \xrightarrow{e_i} \widetilde{C}_i$. Поскольку $\downarrow \widetilde{C}_{i-1} \subset (\downarrow \widetilde{C} \cap \downarrow \widetilde{C}') \subseteq \downarrow \widetilde{C}$, то $\widetilde{C}_{i-1} \to^* \widehat{C} \xrightarrow{e_i} \ldots \to^* \widetilde{C}$ для некоторых $\widehat{C} \in \mathcal{CUT}(N)$ и $e_i \in En(\widehat{C})$ таких, что $(\downarrow \widetilde{C}' \cap \downarrow \widehat{C}) = \downarrow \widetilde{C}_{i-1}$ и $e_i \in (\downarrow \widetilde{C} \cap \downarrow \widetilde{C}')$. Аналогично, так как $e_i \in \downarrow \widetilde{C}'$, то существует $\widehat{C}'$ такой, что $e_i \in En(\widehat{C}')$ и $\downarrow \widetilde{C}_{i-1} \subseteq \downarrow \widehat{C}' \subset \downarrow \widetilde{C}'$. Тогда $(\downarrow \widehat{C} \cap \downarrow \widehat{C}') = \downarrow \widetilde{C}_{i-1}$. Кроме того, $e_i \in En(\widehat{C} \cap \widehat{C}')$, т.е. ${}^\bullet e_i \subseteq \widehat{C} \cap \widehat{C}'$. Благодаря предложению 1, получаем, что ${}^\bullet e_i \subseteq (({}^\bullet N \cup (\downarrow \widehat{C})^\bullet)\backslash^\bullet(\downarrow \widehat{C})) \cap (({}^\bullet N \cup (\downarrow \widehat{C}')^\bullet)\backslash^\bullet(\downarrow \widehat{C}')) \subseteq ({}^\bullet N \cup ((\downarrow \widehat{C})^\bullet \cap (\downarrow \widehat{C}')^\bullet))\backslash({}^\bullet(\downarrow \widehat{C}) \cap {}^\bullet(\downarrow \widehat{C}'))$. Из определения ПСС следует, что ${}^\bullet e_i \subseteq ({}^\bullet N \cup (\downarrow \widehat{C} \cap \downarrow \widehat{C}')^\bullet)\backslash^\bullet(\downarrow \widehat{C} \cap \downarrow \widehat{C}')$, т.е. ${}^\bullet e_i \subseteq \widetilde{C}_{i-1}$. Следовательно, $e_i \in En(\widetilde{C}_{i-1})$ и $\widetilde{C}_{i-1} \xrightarrow{e_i} \widetilde{C}_i$, где $\widetilde{C}_i = (\widetilde{C}_{i-1}\backslash^\bullet e_i) \cup e_i^\bullet$.

По определению ПСС, имеем, что $\downarrow \widetilde{C}_0 = \downarrow {}^\bullet N = \emptyset$. Значит, $\downarrow \widetilde{C}'' = \{e_1, \ldots, e_n\} = (\downarrow \widetilde{C}' \cap \downarrow \widetilde{C})$ $\square$

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольное $e \in Fi(C) \cap Fi(C')$, т.е. $e \in En(C) \cap En(C')$. Благодаря предложению 1, имеем, что ${}^\bullet e \subseteq (({}^\bullet N \cup (\downarrow C)^\bullet)\backslash^\bullet(\downarrow C)) \cap (({}^\bullet N \cup (\downarrow C')^\bullet)\backslash^\bullet(\downarrow C')) \subseteq ({}^\bullet N \cup ((\downarrow C)^\bullet \cap (\downarrow C')^\bullet))\backslash({}^\bullet(\downarrow C) \cap {}^\bullet(\downarrow C'))$. Значит, ${}^\bullet e \subseteq ({}^\bullet N \cup (\downarrow C \cap \downarrow C')^\bullet)\backslash^\bullet(\downarrow C \cap \downarrow C')$, по определению ПСС. По предложению 2, существует сечение C'' такое, что $\downarrow C'' = \downarrow C \cap \downarrow C'$, т.е. $C'' \preceq C$, $C'' \preceq C'$ и ${}^\bullet e \subseteq ({}^\bullet N \cup (\downarrow C'')^\bullet)\backslash^\bullet(\downarrow C'')$. Из предложения 1 следует, что ${}^\bullet e \subseteq C''$, т.е. $e \in En(C'')$.

Покажем, что $C'' \in \mathcal{RCUT}(TN)$. Предположим обратное, т.е. $\tau(C'') = \bot$. Тогда, по определению ВПСС, существует $\widehat{C}'' \in Cut(C'')$ такое, что $\tau(\widehat{C}'') > 0$. Поскольку $\downarrow C'' = (\downarrow C' \cap \downarrow C)$, то $\neg((\downarrow C \cap \downarrow C') \subseteq \downarrow \widehat{C}'')$ и $\neg(\downarrow \widehat{C}'' \subseteq (\downarrow C \cap \downarrow C'))$. Тогда $\neg(\downarrow C \subseteq \downarrow \widehat{C}'')$ и $\neg(\downarrow C' \subseteq \downarrow \widehat{C}'')$. Кроме того, $\neg(\downarrow \widehat{C}'' \subseteq \downarrow C)$ или $\neg(\downarrow \widehat{C}'' \subseteq \downarrow C')$. Следовательно, либо $\widehat{C}'' \in Cut(C)$, либо $\widehat{C}'' \in Cut(C')$. Из определения ВПСС следует, что $\tau(C) = \bot$ или $\tau(C') = \bot$, получили противоречие с $C, C' \in \mathcal{RCUT}(TN)$.

Так как, $e \in Fi(C) \cap Fi(C')$, то $((C\backslash^\bullet e) \cup e^\bullet)$ и $((C'\backslash^\bullet e) \cup e^\bullet)$ из $\mathcal{RCUT}(TN)$. Рассуждая аналогично доказательству $C'' \in \mathcal{RCUT}(TN)$, получаем, что $((C''\backslash^\bullet e) \cup e^\bullet) \in \mathcal{RCUT}(TN)$. Поскольку $C'' \in \mathcal{RCUT}(TN)$ и $e \in En(C'')$, то $e \in Fi(C'')$. Таким образом, $C'' \preceq C$, $C'' \preceq C'$ и $e \in Fi(C'')$. $\square$

Лемма 3.

Пусть $\pi = (TN, \varphi)$ — временной процесс НВСП $\mathcal{TN}$, $C \in \mathcal{RCUT}(TN)$ и сужение φ на C — биекция между C и $\varphi(C)$. Тогда для любого $V \in En(C)$ верно:

(a) сужение φ на множество ${}^\bullet V$ — биекция между ${}^\bullet V$ и ${}^\bullet\varphi(V)$;

(б) сужение φ на V — биекция между V и $\varphi(V)$;

(в) если $\varphi(V)$ — шаг НВСП, то сужение φ на множество $V^\bullet$ — биекция между $V^\bullet$ и $\varphi(V)^\bullet$.

Доказательство леммы 3.

(а) По определению гомоморфизма, имеем, что сужение φ на ${}^\bullet e$ — биекция между ${}^\bullet e$ и ${}^\bullet\varphi(e)$ для любого $e \in V$. Тогда сужение φ на ${}^\bullet V$ — сюръекция на множество ${}^\bullet\varphi(V)$. Пусть $b, b' \in {}^\bullet V$ такие, что $\varphi(b) = \varphi(b')$. Так как $V \in En(C)$, то ${}^\bullet V \subseteq C$. Значит, $b = b'$, поскольку сужение φ на C — биекция между C и $\varphi(C)$. Получаем, из $\varphi(b) = \varphi(b')$ следует, что $b = b'$, для любых $b, b' \in {}^\bullet V$, т.е. сужение φ на ${}^\bullet V$ — инъекция в ${}^\bullet\varphi(V)$. Следовательно, сужение φ на множество ${}^\bullet V$ — биекция между ${}^\bullet V$ и ${}^\bullet\varphi(V)$.

(б) Очевидно, что сужение φ на V — сюръекция на множество $\varphi(V)$. Осталось показать, что данное сужение является инъекцией в множество $\varphi(V)$. Предположим обратное, т.е. существуют $e \neq e' \in V$ такие, что $\varphi(e) = \varphi(e')$. Тогда ${}^\bullet\varphi(e) = {}^\bullet\varphi(e')$. По определению гомоморфизма, получаем, что $\varphi({}^\bullet e) = \varphi({}^\bullet e')$. Так как ${}^\bullet e \cup {}^\bullet e' \subseteq {}^\bullet V$, то ${}^\bullet e = {}^\bullet e'$, согласно пункту (а). Следовательно, $e = e'$, по определению ПСС. Получили противоречие с $e \neq e'$.

(в) По определению гомоморфизма, имеем, что сужение φ на $e^\bullet$ — биекция между $e^\bullet$ и $\varphi(e)^\bullet$ для любого $e \in V$. Тогда сужение φ на $V^\bullet$ — сюръекция на множество $\varphi(V)^\bullet$. Пусть $b, b' \in V^\bullet$ такие, что $\varphi(b) = \varphi(b')$. Тогда $b \in e^\bullet$ и $b' \in e'^\bullet$ для некоторых $e, e' \in V$. Из определения гомоморфизма получаем, что $\varphi(b) = \varphi(b') \in \varphi(e^\bullet) \cap \varphi(e'^\bullet) = \varphi(e)^\bullet \cap \varphi(e')^\bullet$. Так как $\varphi(V)$ — шаг и $\varphi(e)^\bullet \cap \varphi(e')^\bullet \neq \emptyset$, то $\varphi(e) = \varphi(e')$. Благодаря пункту (б), получаем, что $e = e'$. Значит, по определению гомоморфизма, $b = b'$, так как $b, b' \in (e = e')^\bullet$ и $\varphi(b) = \varphi(b')$. Получаем, из $\varphi(b) = \varphi(b')$ следует, что $b = b'$, для любых $b, b' \in V^\bullet$, т.е. сужение φ на $V^\bullet$ — инъекция в $\varphi(V)^\bullet$. Следовательно, сужение φ на множество $V^\bullet$ — биекция между $V^\bullet$ и $\varphi(V)^\bullet$. $\square$

Лемма 4.

Пусть $\pi = (TN, \varphi)$ — временной процесс НВСП $\mathcal{TN}$, $\omega_l = C_0 \ldots C_l$ и $\omega'_m = C'_0 \ldots C'_m$ — префиксы графиков ω и ω' из $Graph(TN)$ соответственно и переход $t \in T$ такие, что $C_l = C'_m$ и $t \in En(\varphi(C_l = C'_m))$. Тогда

$$\mathbf{Clock}(\omega_l, t) = \mathbf{Clock}(\omega'_m, t).$$

Доказательство леммы 4.

Предложение. Если $C \in \mathcal{CUT}(N)$, то сужение φ на C — биекция между C и $\varphi(C)$.

Доказательство предложения. Благодаря определению ПСС, имеем, что $\downarrow{}^\bullet N = \emptyset$. Тогда $\downarrow{}^\bullet N \subseteq \downarrow C$, т.е. ${}^\bullet N \preceq C$. Это означает, что существует последовательность сечений и событий вида: ${}^\bullet N = \widehat{C}_0 e_1 \widehat{C}_1 \dots e_n \widehat{C}_n = C$ такая, что $\widehat{C}_{j-1} \xrightarrow{e_j} \widehat{C}_j$ для $1 \leq j \leq n$. Покажем индукцией по $0 \leq i \leq n$, что $\varphi(e_1)\dots\varphi(e_n)$ — пробег в $\mathcal{N}$ (базовая сеть Петри $\mathcal{TN}$), т.е. $M^0 \xrightarrow{\varphi(e_1)} M^1 \dots M^{n-1} \xrightarrow{\varphi(e_n)} M^n$, и сужение φ на $\widehat{C}_i$ — биекция между $\widehat{C}_i$ и M^i.

i=0. Сужение φ на $\widehat{C}_0 = {}^\bullet N$ — биекция между $\widehat{C}_0$ и M^0, по определению гомоморфизма.

i>0. По предположению индукции, имеем, что $M^0 \xrightarrow{\varphi(e_1)} M^1 \dots M^{i-2} \xrightarrow{\varphi(e_{i-1})} M^{i-1}$ и сужение φ на $\widehat{C}_{i-1}$ — биекция между $\widehat{C}_{i-1}$ и M^{i-1}. Поскольку $\widehat{C}_{i-1} \xrightarrow{e_i} \widehat{C}_i$, то $e_i \in En(\widehat{C}_{i-1})$, т.е. ${}^\bullet e_i \subseteq \widehat{C}_{i-1}$. Это означает, что $\varphi({}^\bullet e_i) \subseteq \varphi(\widehat{C}_{i-1}) = M^{i-1}$. Значит, $\varphi(e_i) \in En(M^{i-1})$, по определению гомоморфизма. Тогда, из определения СП следует, что $M^{i-1} \xrightarrow{\varphi(e_i)} M^i$, где $M^i = (M^{i-1} \setminus {}^\bullet\varphi(e_i)) \cup \varphi(e_i)^\bullet$. Покажем, что сужение φ на $\widehat{C}_i$ — биекция между $\widehat{C}_i$ и M^i. Так как $\widehat{C}_{i-1} \xrightarrow{e_i} \widehat{C}_i$, то $\widehat{C}_i = (\widehat{C}_{i-1} \setminus {}^\bullet e_i) \cup e_i^\bullet$. Используя определение гомоморфизма и тот факт, что сужение φ на $\widehat{C}_{i-1}$ биекция между $\widehat{C}_{i-1}$ и M^{i-1}, получаем, $\varphi(\widehat{C}_i) = (\varphi(\widehat{C}_{i-1}) \setminus {}^\bullet\varphi(e_i)) \cup \varphi(e_i)^\bullet = M_i$. Кроме того, поскольку $\mathcal{N}$ — бесконтактная СП и $\varphi(e_i) \in En(M^{i-1})$, то $(\varphi(\widehat{C}_{i-1}) \setminus {}^\bullet\varphi(e_i)) \cap \varphi(e_i)^\bullet = \emptyset$. Следовательно, сужение φ на $\widehat{C}_i$ — биекция между $\widehat{C}_i$ и M^i. $\square$

Доказательство леммы. Достаточно показать, что $\mathbf{Clock}(\omega_l, t) \geq \mathbf{Clock}(\omega'_m, t)$ ($\mathbf{Clock}(\omega'_m, t) \geq \mathbf{Clock}(\omega_l, t)$ симметрично).

Возможны два случая.

- $\mathbf{Clock}(\omega_l, t) = \sum\limits_{0 \leq j \leq l} \tau(C_j)$. Так как $\omega, \omega' \in Graph(TN)$ и $C_l = C'_m$, то $\mathbf{Clock}(\omega_l, t) = \sum\limits_{C \in (\{C_0, \dots, C_l\} \cap \{C'_0, \dots, C'_m\})} \tau(C) \geq \mathbf{Clock}(\omega'_m, t)$, благодаря утверждению 1(б).
- $\mathbf{Clock}(\omega_l, t) = \sum\limits_{k < j \leq l} \tau(C_j)$ для некоторого $k < l$, т.е. $t \notin En(\varphi(C_k))$ и $t \in En(\varphi(C_{k+1}))$. Значит, существует $p \in {}^\bullet t \subseteq \varphi(C_{k+1})$ такой, что $p \notin \varphi(C_k)$. Так как $\omega \in Graph(TN)$, то $C_k \xRightarrow{V_{k+1}} C_{k+1}$, т.е. ${}^\bullet V_{k+1} \subseteq C_k$ и $C_{k+1} = (C_k \setminus {}^\bullet V_{k+1}) \cup V_{k+1}^\bullet$. Тогда $p \in \varphi(V_{k+1}^\bullet)$ и $p \notin \varphi({}^\bullet V_{k+1})$, т.е. $p \in \varphi(e^\bullet)$ и $p \notin \varphi({}^\bullet e)$ для некоторого $e \in V_{k+1}$. Поскольку $e \in$

$\downarrow C_l = \downarrow C'_m$, то, по определению графика, существует $0 \leq k' < m$ такой, что $e \in V'_{k'+1}$ и $C'_{k'} \overset{V'_{k'+1}}{\Rightarrow} C'_{k'+1}$, т.е. $e \in En(C'_{k'})$ и $e \in \downarrow C'_{k'+1}$. Покажем, что $p \notin \varphi(C'_{k'})$. Предположим обратное, т.е. $p \in \varphi(C'_{k'})$. Тогда $p \in \varphi(C'_{k'} \setminus {}^\bullet e)$, так как $p \notin \varphi({}^\bullet e)$. Поскольку $p \in \varphi(e^\bullet)$, то, в силу ацикличности ПСС, получаем, что сужение φ на $C = (C'_{k'} \setminus {}^\bullet e) \cup e^\bullet \in \mathcal{CUT}(N)$ не является инъекцией в $\varphi(C)$. Получили противоречие с тем, что сужение φ на C — биекция между C и $\varphi(C)$, по предложению. Следовательно, $p \notin \varphi(C'_{k'})$, т.е. $t \notin En(\varphi(C'_{k'}))$.

Поскольку, $0 \leq k' < m$, $t \notin En(\varphi(C'_{k'}))$ и $t \in En(\varphi(C'_m))$, то существует $k' \leq i < m$ такой, что $t \notin En(\varphi(C'_i))$ и $t \in En(\varphi(C'_{i+1}))$, т.е. $\mathbf{Clock}(\omega'_m, t) = \sum\limits_{\max i < j \leq m:\, t \in En(\varphi(C'_j))} \tau(C'_j)$. Тогда $\mathbf{Clock}(\omega'_m, t) \leq \sum\limits_{k' < j \leq m} \tau(C'_j)$. Так как $e \in \downarrow C'_{k'+1}$, то из определения графика следует, что $e \in \downarrow C'_j$ для $k' < j \leq m$. Кроме того, $e \notin \downarrow C_i$ для $0 \leq i \leq k$, так как $e \in V_{k+1}$. Значит, $C'_j \notin \{C_0, \ldots, C_k\}$ для $k' < j \leq m$. Покажем, что если $\tau(C'_j) > 0$ $(k' < j \leq m)$, то $C'_j \in \{C_{k+1}, \ldots, C_l\}$. Рассмотрим произвольное $k' < j \leq m$ такое, что $\tau(C'_j) > 0$. Поскольку $\omega \in Graph(TN)$ и $C'_j \preceq C'_m = C_l$, то $C'_j = C_i$ для некоторого $0 \leq i \leq l$, благодаря утверждению 1(б). Кроме того, $i > k$, так как $C_i = C'_j \notin \{C_0, \ldots, C_k\}$. Получили, что $C'_j = C_i \in \{C_{k+1}, \ldots, C_l\}$. Следовательно, имеем, что $\mathbf{Clock}(\omega'_m, t) \leq \sum\limits_{k' < j \leq m} \tau(C'_j) = \sum\limits_{C \in \{C'_{k'+1}, \ldots, C'_m\}} \tau(C) = \sum\limits_{C \in (\{C'_{k'+1}, \ldots, C'_m\} \cap \{C_{k+1}, \ldots, C_l\})} \tau(C) \leq \sum\limits_{k < j \leq l} \tau(C_j) = \mathbf{Clock}(\omega_l, t)$. $\square$